TECHE UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1025_VIII**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

VIII

COMMERZ
DI LETT. DE
CON. PROF.
REGG. A. T. I
T. VIII

1025
VIII

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1025
VIII

[illegible] di S. Lorenzo

[illegible]

Tomo VIII

[illegible]

Commerzio di Lettere
dal
Co: Giordano Riccati
Tomo VIII.
nell'anno 1779.

Indice degli Autori delle Lettere.

Calandrelli (Ab. Giuseppe) pag. 7, 55, 69, 85, 97, 169, 179, 183, 251, 329, 363, 367, 385.

Caldani (Petronio Maria) pag. 75, 103, 157, 199, 221.

Canonici (Ab. Matteo Luigi) pag. 67, 99, 165.

Casarotti (Melchior) pag. 269.

Contarelli (Ab. Giuseppe) pag. 41, 95, 123, 125, 155, 181, 189, 211, 219, 229, 299, 305, 325.

Cossali (P. D. Pietro) pag. 231, 283.

Franzoja (Ab. Co. Matteo) pag. 269.

Giannini (Pietro) pag. 159.

De' Malfatti (Gian-Francesco) pag. 17, 29, 301, 375.

Mariscotti (Giacomo) pag. 365.

Nicolai (Arcip. Giambatista) pag. 25, 51.

Pellizzari (Ab. Antonio) pag. 307.

Polinà (P. D. Pier Maria) pag. 327.

Riccati (Co. Giordano) pag. 1, 11, 15, 21, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 63, 65, 79, 89, 105, 107, 111, 115, 119, 129, 139, 143, 149, 151, 163, 187, 191, 195, 197, 201, 203, 213, 217, 223, 225, 249, 263, 271, 273, 277, 279, 281, 303, 309, 315, 319, 323, 355, 359, 361, 371, 373, 377, 389.

Sacchi (P. D. Giovenale) pag. 101, 387.

Tiraboschi (Ab. Girolamo) pag. 259.

Troili (Ab. Domenico) pag. 45, 357.

Van-Autgarden (Ab. Alberto) pag. 261.

Ximenes (Ab. Leonardo) pag. 161, 311, 369.

La sua dottissima lettera dal S. Xtova principia dalla consi= derazione della serie $u = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$ esprimente l'arco u per la tangente z. Acciocchè le serie riescano di uso, fa di mestieri che siano convergenti, e sommabili almeno con fisica approssimazione. La premessa serie può essere convergente, e diver= gente secondo i diversi valori, che si attribuiscono a z. Si faccia $z = 1$, e ci si presenterà $u = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. Questa serie mi darà il valore di u maggiore del vero, se io mi fermo in un termine dispari, e me lo darà minore, se io mi fermo in un termine pari, ma sempre con minori differenze quanto più la continuo. Che se io pongo $z = \infty$, la serie diviene divergente, e sempre più si discosta dal giusto. Fermandomi in un termine impari, trovo l'arco uguale ad un infinito positivo, e fermandomi in un termine pari, scopro l'arco predetto uguale ad un infinito negativo. ~~Minor inconveniente ne nasce~~ Met= tendo $z = \frac{1}{0}$; ~~imperciocchè~~ ne risulta $u = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{0} - \frac{1}{0}$ &c., e secondochè mi fermo in un termine dispari, o pari, ho $u = \frac{1}{0}$, $u = 0$, valori, che chiudono fra limiti ~~[illegible]~~ immensamen= te distanti il giusto valore di u.

Se nella formola $z = \frac{p - \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{120}p^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{24}p^4 - \&c.}$, in cui p dinota il quadrante, ~~si sommassero~~ riuscisse di sommare il numeratore, ed

venirò degli assurdi. Se fatto decrescere il denominatore di una frazione il valore sempre cresce; se adunque si credesse che $\frac{1}{0}$ fosse l'infinito, essendo -1 meno di zero sarebbe più che infinito: così similmente decrescendo il numeratore decresce il valore della frazione, onde essendo $\frac{0}{1} = 0$, ed essendo -1 minore di zero sarà $\frac{-1}{1}$ minore di zero. Come adunque le due frazioni $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$, quali sen

ed il denominatore della frazione, si troverebbe que-
trascendentemente infinito in riguardo a questo, e
quindi ne proverrebbe $z = \frac{1}{0}$.

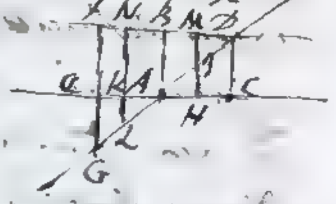
La formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{a}\, l.\, \frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$, fatto $z = \frac{a^2}{n}$, si cangia
nella seguente $u = \frac{\sqrt{-1}}{a}\, l.\, \frac{-\frac{a^3}{n} - a^2\sqrt{-1}}{\frac{a^2}{n} - a\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{a}\, l.\, \frac{-na}{n} \cdot \frac{a+n\sqrt{-1}}{a-n\sqrt{-1}}$
Ella m'accorda, che per quanto infinitamente sia n, si ha
$\frac{n}{n} = 1$, e per conseguenza $u = \frac{\sqrt{-1}}{a}\, l.\, -a \cdot \frac{a+n\sqrt{-1}}{a-n\sqrt{-1}}$; ed io
aggiungo, che la stessa formola si avvera anche qu[ando]
$n = 0$. Supponiamo vera la mia asserzione, ove
si abbia nella detta ipotesi $u = \frac{\sqrt{-1}}{a}\, l.\, -a \cdot \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$.
Concedendosi da Lei, che $0\sqrt{-1}$ si possa negligere
in riguardo ad a, cerchiamo il valore di z,
rispettivamente a cui sia egualmente permesso
il trascurare la quantità $a\sqrt{-1}$. Facciasi dunque
$0\sqrt{-1} : a\sqrt{-1}$, ossia $0 : a :: a : z = \frac{a^2}{0}$, e si
raccolga, che relativamente a $z = \frac{a^2}{0}$ cioè a[d un]
dire trascendentemente infinito è lecito il tra-
scurare la grandezza finita $a\sqrt{-1}$, dimodochè
risulti in tal circostanza $u = \frac{\sqrt{-1}}{a}\, l.\, -a$.

Col raggio $AC = a$ descritto il circolo
AQB, taglio l'arco $AQ = u$, il cui seno
$DQ = x$, e la tangente $AT = z$. La
similitudine dei triangoli CDQ, CAT mi somministra
l'analogia $CD : DQ :: CA : AT$
$\sqrt{a^2 - x^2} : x :: a : z = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Quando l'arco AQ si eguaglia al quadrante, abbia[mo]
il

il seno $x = a$, e la tangente $z = a$. Un tal valore adunque competa a z, qualora si avrà a paragone il quadrante; e quindi in detto incontro $= \sqrt{-1}$ l-a.

Abbiasi il luogo geometrico della linea retta GAD inclinata all'asse QAC ad angolo semiretto, onde all'assissa positiva $AH = n$ si corrisponda l' ordinata positiva $HD = n$, ed all'assissa negativa $AK = -n$ si riferisca l'ordinata altresì negativa $KG = -n$. Ciò posto si cerchi il secondo luogo geometrico, la cui assissa $\pm n$, e la ordinata $\frac{\pm n}{\pm n}$, ed anche della concavità, che questo sarà la linea retta ZAD parallela all'asse QC, e da asse distante per l'unità. Ora il mio argomento consiste in ciò. Per quanto io diminuisca l' assissa positiva $AH = n$, ho sempre l'ordinata al secondo luogo geometrico $HM = 1$. Lo stesso accade quando la detta assissa passa ad essere negativa, essendo sempre $\frac{AK}{KG} = KN = 1$. Dunque per la legge della continuità esser deve $\frac{n}{n} = 1$ anche quando $n = 0$. Può essere che io m'inganni; ma certamente io credo il mio argomento convincentissimo.



Anche alla da per sua mero, sostiene, che le flussioni dy, dx abbiano a diminuirsi oltre ogni limite, dipendendo da questa proprietà la geometrica esattezza del metodo delle flussioni, il quale nulla trascura. Domandomi sull' esempio della suttangente nella parabola, sostenendo a dy, dx si assegnano due minimi relativi valori determinati

...miro degli assurdi. Di fatti decrescendo il denominatore di una frazione il valore sempre cresce; se adunque si credesse che $\frac{1}{0}$ fosse l'infinito, essendo -1 meno di zero sarebbe più che infinito: così similmente decrescendo il numeratore decresce il valore della frazione, onde essendo $\frac{0}{1} = 0$, ed essendo -1 minore di zero sarà $\frac{-1}{1}$ minore di zero. Come adunque le due frazioni $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$, quali son

determinati; l'analogia $dy : dx :: y : \frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2 + y\,dy}{a} = 2x + \frac{y\,dy}{a}$ ci dà la sottosecante. Ma considerate gli elementi dy, dx come fluenti indefinitamente verso del nullo; la sottosecante $2x + \frac{y\,dy}{a}$ si acco[sta] sempre più alla sottotangente $= 2x$, secondochè dy va diminuendo; onde finalmente pel metodo degli Antichi la prima alla seconda si agguagli, nel quale incontro $dy : dx :: y : 2x$. Questa ragione di $dy : dx$ il Newton la chiama ultima, siccome quella che ci somministra la sottotangente con tutta la geometrica precisione. L'Ab. Vincenzo mio fratello dà, siccome io penso, la vera e genuina idea della quantità infinitesime nel primo Capo del secondo Tomo delle sue Instituzioni Analitiche.

La formola $u = \sqrt{-1}\; l\,\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ è certamente vera ed agevolmente si può dedurre dall'altra for[mola] $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\; l\,\frac{-z - \sqrt{-1}}{z - \sqrt{-1}}$. Perchè di sopra ho trova[to] $z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, fatta la sostituzione di un tal valore ci si presentava $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\; l \left(\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{-1}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{-1}} \right) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\; l\,\frac{-x - \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$.

Avremo pertanto se la mia formola è vera

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\; l\,\frac{-x - \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} = \sqrt{-1}\; l\,\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}},$$ e quindi

$$l\,\frac{-x - \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} = 2\, l\,\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}} = l\,\frac{(x + \sqrt{x^2-1})^2}{-1},$$ e passa[ndo]

dai

Dai logaritmi ai numeri, e dividendo per $x+\sqrt{x^2-1}$,
$\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = x+\sqrt{x^2-1}$, e finalmente moltiplicando
per $x-\sqrt{x^2-1}$, $1=1$; il che prova della mia
formola la verità. Ora siccome la formola $u=$
$\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$ mi dà sempre reali le tangenti, e dagli
archi reali u, lo stesso si dee raccogliere anche
dalla formola equivalente $u=\sqrt{-1}\, l.\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$.
Abbiasi per esempio l'equazione $2u=2\sqrt{-1}\, l.\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}} =$
$\sqrt{-1}\, l\, (2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})^{-1} = \sqrt{-1}\, l\, \frac{q+\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{-1}}$, in cui q si suppone
il seno dell'arco $2u$. ~~[illegible]~~
~~[illegible] $q = \frac{[illegible]}{(4x^2-2)\sqrt{-1}+4x\sqrt{1-x^2}}$~~
~~$\sqrt{1-x^2}$, e giudica sempre immaginario il valore di~~
~~q, eccettuato il caso di $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ciò frattanto non si~~
~~accorda col vero, e dimostra la prova facendo $x=\frac{1}{2}$.~~
~~In tale ipotesi avremo $q = \frac{[illegible]}{-\sqrt{-1}+2\sqrt{\frac{3}{4}}}$~~
~~$1 = \frac{[illegible]}{-\sqrt{-1}+2\sqrt{3}} [illegible] + \frac{1}{4}\sqrt{3} [illegible] = \frac{[illegible]}{-\sqrt{-1}+2\sqrt{3}}$~~
~~moltiplicando e dividendo per $\sqrt{-1}$,~~
~~$q = \frac{3}{4}(\sqrt{-1}-\sqrt{3})$~~ ella giudica sempre immagina-
rio il valore di q, eccettuato il caso di $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ciò frattanto non si accorda col vero, e dimostra la
prova facendo $u=30°$, ed $x=\frac{1}{2}$. In tale ipotesi
avremo $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{q+\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{-1}}$, e perciò
$\frac{1}{2}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\sqrt{3}-q = \sqrt{q^2-1}$, ed alzando al quadrato
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}\,(-\sqrt{-1}-\sqrt{3})\,q+q^2 = q^2-1$, e quindi

...mero degli assurdi. Poi fatti decrescendo il denomi[natore]
di una frazione il valore sempre cresce, se adunque
si credesse che $\frac{1}{0}$ fosse l'infinito, essendo -1 meno di ze-
ro sarebbe più che infinito: così similmente decrescen-
do il numeratore decresce il valore della frazione, onde es-
sendo $\frac{0}{1}=0$, ed essendo -1 minore di zero sarà $\frac{-1}{1}$ mino-
re di zero. Come adunque le due frazioni $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$, quali sen-

quindi $\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{\sqrt{3}+\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = g$, che è quel valore, che compete al seno dell'arco $2u = 60°$.
Il perchè la formola $u = \sqrt{-1}\; l\, \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$, è giusta, e raccogliendosi da essa, quando $u = \frac{1}{2}p$, ed $x = 1$, $\frac{p}{2} = \sqrt{-1}\; l\, \frac{1}{\sqrt{-1}}$ e conseguentemente $p = \sqrt{-1}\cdot 2\, l\, \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\; l\, {-1}$, lo stesso deve darci anche l'altra formola $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{-1}}{2}\; l\, \frac{-\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}{\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}$, o sia $p = \sqrt{-1}\; l\, \frac{-\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}{\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}$, e però $\frac{-\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}{\frac{1}{0}-\sqrt{-1}} = -1$, il che patentemente dimostra doversi in tal caso trascurare la quantità $-\sqrt{-1}$, che deve riputarsi nulla in riguardo alla tangente trascendentemente infinita $= z = \frac{1}{0}$.

Questo è quanto ho saputo riflettere intorno alla sua sapientissima lettera de' 5 Xbre, e tocca a Lei, Ornatissimo Sig. Abate, a decidere qual peso abbiano le mie riflessioni. Nel Tomo XV del Giornale di Modena è uscita la Risposta alle Riflessioni Analitiche del Sig. Ab. Rassuti, che avrò piacer ch'Ella legga, e mi partecipi il rispettatissimo suo parere. Ed intanto colla solita stima e rispetto mi dichiaro di essere

Di V.S. Ill.ma

Treviso p.o Gen.o 1779

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

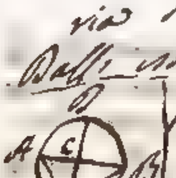
…miro degli assurdi. Di fatti decrescendo il denomin…
di una frazione il valore sempre cresce; se adunque
si credesse che $\frac{1}{0}$ fosse l'infinito essendo -1 meno di ze-
ro sarebbe più che infinito: così similmente decrescen-
do il numeratore decresce il valore della frazione, onde es-
sendo $\frac{0}{1}=0$, ed essendo minore di zero sarà $\frac{-1}{1}$ mino-
re di zero. Come adunque le due frazioni $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$, quali son-

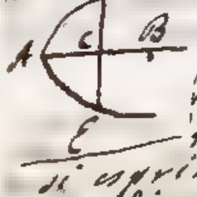
llo
si o
Non
me
fal
Log
lib
agg
lter
ibn
nic
non
di a
d
lib
que
non
zion
vero
an
plic
esse
que
mentr
emir
di
ri c
to
do il
endo
ai d

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

[ne]llo stesso giorno in cui ricevo la sua pregiatissima, dandosi
[m]i occasione opportuna di posta rispondo.
[N]on posso credere che Leibnitz si sia servito dell'argomento da
[m]e trascritto nella mia ultima, impegnato a sostenere una
falsa sentenza. Prima, che incominciasse la disputa de
Logaritmi delle quantità negative tra Leibnitz, e Bernoulli,
Leibnitz aveva esposto questo argomento in una osservazione
aggiunta ad una memoria di Varignonio contro il P. Grandi
(Act: Erudi Lipsi: An: 1712). In questa osservazione afferma Le-
ibnitz, che ritrovandosi in Parigi, ed avendoli Arnaldo commu-
nicati i suoi elementi di Geometria, l'assicurava ancora di
non poter concepire come potesse essere 1:-1 come -1:1. Fin
d'allora adunque incominciò Leibnitz a sospettare, che -1:1,
ed 1:-1 non fossero vere ragioni. Questi suoi dubbi avvalorò
Leibnitz con le ragioni, quali in seguito di tempo espose in
questa sua osservazione; quale communicata a Giovanni Ber-
nulli (Com: Epist: Epist: CXC) fu l'origine della celebre ques-
tione de' Logaritmi delle quantità negative.
[È] vero, che due quantità non cangiano proporzione multipli-
[ca]ndole per la stessa quantità: ma è anche vero, che molti-
plicando il numeratore, e denominatore di una frazione per la
stessa quantità, la frazione non muta valore. Intanto adun-
que 1:-1 moltiplicato per -1 si trova eguale a -1:1, perchè
1:-1, -1:1 sono due frazioni eguali; e non già perchè 1:-1,
-1:1 siano due ragioni eguali. Che poi 1:-1, -1:1 siano due
frazioni eguali è chiaro; mentre senza contrasto $1:-1 = \frac{1}{-1}$,
$-1:1 = -\frac{1}{1}$. Esprimo si 1:-1, che -1:1 per $-\frac{1}{1}$, e non per $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$;
mentre da queste espressioni male intese, ne potrebbero pro-
venire degli assurdi. Di fatti decrescendo il denominatore
di una frazione il valore sempre cresce; se adunque
si credesse che $\frac{1}{0}$ fosse l'infinito, essendo -1 meno di ze-
ro sarebbe più che infinito: così similmente decrescen-
do il numeratore decresce il valore della frazione, onde es-
sendo $\frac{0}{1} = 0$, ed essendo -1 minore di zero sarà $\frac{-1}{1}$ mino-
re di zero. Come adunque le due frazioni $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$, quali son-

ia contrasto sono i quali potrebbero eguagliarsi, secondo qu[...]
idee; quando la prima avesse un valore più che infinito, [...]
la seconda minore del niente. Questo errore, quale io [...]
no è stato l'errore di Wallis, quale credeva che $1:-1$ [...]
una ragione più che infinita. Se si adotti l'opinione [...]
Wallis; $-1:1$ sarebbe una ragione minore del niente, [...]
non eguale a $1:-1$. Contro l'opinione di Wallis ha [...]
giamente scritto Varignonio (Hist. dell' Acca. Roya. des Scien[...]
ed essendo di novo stata riprodotta questa opinione da[...]
di Varignonio contro Grandi ancora ha risposto nella [...]
via di sopra indicata (Ac. Erud. Lip. 1712).

Dalli essere $AC:-CE = CE:CB$ dico che non si puole dedurre [...]


posto $CB=1$; essere $1:-1=-1:1$, mentre in primo luogo [...]
ragione di $AC:CE$ non si puole esprimere per $1:-1$, no[...]
essendo CB in posizione contraria di CE; così similm[ente]
non essendo CB in posizione contraria di CE, la rag[ione]
di $CE:CB$ malamente si esprime per $-1:1$. In secondo luogo
se per essere CE in posizione contraria di $AC=1$, si pone
con simile ragione per essere CB in posizione contraria
$AC=1$, si dovrà fare $CB=-1$; onde in questo caso la pr[oporzione]
zione di $CA:CE = CE:CB$ si trasmuterà in $1:-1=-1:-1$.
Le ragioni qui accennate possono applicarsi alla Parabola [...]
E. Data CB parametro, CE semiordinata, AC ascissa [...]
rà $CB:CE = CE:AC$; da questa proporzione però mala[mente]


te si deduce essere $a:-y=-y:x$; mentre n[on]
essendo CE in posizione contraria di CB, la [ra]
gione di $CB:CE$ non si puole esprimere per a[...]
così similmente non essendo AC in posizione [con]
traria di CE la ragione di $CE:CA$ malamen[te]
si esprime per $-y:x$. Di più come sopra; se per esse[re]
CE di posizione contraria a CB, si fa eguale a $-y$ [...]
lo stesso motivo per essere CA di posizione contraria [...]
sarà negativa rispetto a CB; onde ponendo $a=x=y=1$ [...]
proporzione di $CB:CE = CE:AC$ si trasmuterà in $1:-1=$ [...]
-1. A tutto ciò aggiungo che dall'equazione $ax=y^2$ si [...]
la dedurre dover essere nella Parabola $\pm\sqrt{ax}=\pm y$ [...]
$+\sqrt{ax}=+y$, $-\sqrt{ax}=-y$. Ora è certo che se due quantità [...]
eguali, e due altre diverse delle prime similmente eguali, [...]
generalmente uno degli eguali nelle prime due quantità [...]
degli eguali nelle seconde due quantità come l'altro d[egli]
eguali nelle prime, all'altro degli eguali nelle seconde [...]
Sarà adunque $-\sqrt{ax}:-\sqrt{ax}=+y:-y$; nè mai potrà essere $+$[...]
$-\sqrt{ax}=-y:+y$; se pur non si voglia alterare la generalità [...]
esposto principio. Benchè adunque evidentemente costi, no[n]
siri $+\sqrt{ax}:-\sqrt{ax}$, $-1:y$ ragioni eguali; ciò non ostante non [...]
essere due eguali frazioni, cioè essere $-\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}}=-\frac{y}{y}$. Se si p[one]
$a=x=y=1$; $+\sqrt{ax}:-\sqrt{ax}$, $-y:+y$ si trasmuterà in $+1:-1$, [...]

onde $a+\sqrt{ax} : -\sqrt{ax}$, $-y : +y$ non sono ragioni eguali: ne pure lo saranno $1:-1$, $-1:1$.

La ragione qui esposta nella Parabola puole applicarsi anche al circolo, nel quale sarà $AC\cdot CB = CE^2$ onde $\pm\sqrt{AC\cdot CB} = \pm CE$. onde essendo $+\sqrt{AC\cdot CB} = +CE$, $-\sqrt{AC\cdot CB} = -CE$ sarà certo $+\sqrt{AC\cdot CB} = 1$ a $-\sqrt{AC\cdot CB} = -1$ come $+CE = 1$ a $-CE = -1$; ma non sarà già $1:-1 = -1:1$.

Con mio sommo piacere avendo nel futuro ordinario la sua promessa; e fra tanto ad incremento delle scienze augurandoli felice l'incominciato Anno al solito mi dico.

di V.S. Ill.ma Roma a del 1779

Umil.mo ed Oblig.mo Servo
Giuseppe Calandrelli.

7

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia p. Treviso.

Rispondendo alla sua umanissima lettera seguirò l'
ordine dei numeri della figura.

1. Nella figura prima manca un I, che va collocato nell' intersezione dei due raggi osculatori DI, CI. Inoltre evvi un N rovescio, che vuol essere accomodato; il che si effettui parimente negli altri N rovesci, che frequentemente si incontrano nelle rimanenti figure.

2. Nella figura seconda manca la lettera O sotto il circolo diametralmente opposta alla lettera O', e manca ancora la lettera M' al di sopra della lettera B' nell'estremità della linea rM'B'M'. Al centro del nominato circolo manca un L. Rifletto di più, che le due lettere Q', Q vanno poste fra l' assintoto, e la curva, dovendo appartenere all' uno, e all' altro in una distanza, che si suppone infinita. Avverto altresì, che la curva segnata a punti dee passare pel punto C, e non pel punto F. Sarebbe ancora ben fatto continuare un poco al di sopra della linea DM la curva P'D'RD, e le tre rette KD, AP, BM.

3. Nella figura terza la logaritmica ARrRP ha da oltrepassare un poco la retta A'rQ', e nella estremità di questa curva dee collocarsi la lettera P sulla mentovata retta A'rQ', e la curva a punti nCnCrQ

devono

Colla lettura di esse resterà convinto il Sig. Ab. Bassuti, che mio fratello avea letta, ed esaminata la Memoria dell' Eulero, in cui determina tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo, e comprenderà che ridotta

a

dovono ascendere alquanto sopra la logaritmica, e
la lettera 2Q dee porsi fra l'assintoto, e la curva
a punti. Nello aggiustare le lineette, che segno p[...]
vicine al circolo [illegible]

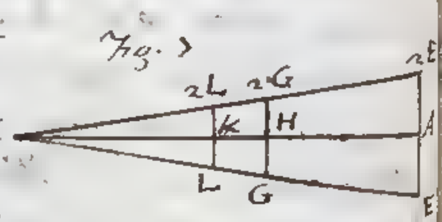
4. Nella figura quarta al centro del circolo manca un [...]

5. Nella figura quinta manca una lineetta alla N. sup[...]
riore della linea N'N. Nella stessa manca un [...]
nel punto della intersezione della linea N'N colla
linea D T P. Aggiungo, che la retta 2V 2L dee pa[...]
sare per l'intersecazione della curva HaL 2N' colla
retta A'2bB; e che la curva N'LZ2E2N è mal
espressa, dovendo la porzione ZL voltare il co[...]
vesso verso la retta A'B.

6. Nella figura sesta la porzione di curva GQ segnata
a punti deve andarsi accostando all'assintoto AQ.

7. Opportunamente mi sono accorto di aver tralasci[...]
la figura settima, che esser dovrà la seguente, e si
dovrà inserire nello spazio, che v'è fra la fig. 6.
e quella, che presentemente è segnata col nume[...]
7., e dovrà notarsi col numero 8., essendo così
nominata nella Dissertazione.

Fig. 7



8. Ho già detto, che dovrà divenir
ottava quella figura, che nella
Tav. II. è segnata col numero 7.

Se

Se la stampa della Dissertazione è compiuta, non bisogna por mano nei numeri 6, 9, 10 della sua ultima figura, onde la Tav. II. si accordi colla Dissertazione, tollerando che due figure diverse ricevano lo stesso numero 6. perchè questo sbaglio ci sarà ancor nella stampa. Che se l'impressione non è per anco giunta al num.ro XXXXIII., le sue ultime figure si segnino ordinatamente coi numeri 9, 10, 11, e nel mio manoscritto le citazioni delle figure si aggiustino, accrescendo i numeri per l'unità.

Io qui supporrò, che la stampa non sia ancor pervenuta al num.ro XXXXIII. dimodochè si possa levare il notato errore.

In questa figura fa di uopo solamente cangiare il numero 6. nel numero 9.

In questa figura il numero 9. si muti nel numero 10.

Sostituito al numero 10. il numero 11. si accomodi la figura, facendo che la massima ordinata corrisponda alla lettera d.

Io sono contentissimo della nettezza delle figure, e ben mi persuado, che sarà corrispondente ancora la stampa. Desidererei solamente, che si potesse togliere lo sbaglio suparto, il quale per altro non

Colla lettura di esse, resterà convinto il Sig. Ab. Bassuti, che mio fratello aveva letta, ed esaminata la Memoria dell'Eulero, in cui determina tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo, e comprenderà che ridotta a

14

non è di molto momento. Hò l'onore di protestarmi colla maggiore stima, e rispetto

Di Lei Sig.r Abate Prone Stimat.mo

Treviso 26 Gen.o 1779

Ill.mo Sig. Ab. Alessandro Zorzi
Ferrara

Divot.mo ed Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Conte Prone col.mo 17

41

Ho letto con moltissimo mio piacere le 6 lettere sulla celebre questione

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 15

Dal Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti avrà V.S. Ill.ma ricevuto, o sarà quanto prima per ricevere due Dissertazioni, che la supplico a farmi la grazia di inserire nel Giornale. Della prima la ho scritto alcuni mesi fa, ch'è composta da due Lettere, nelle quali provo, che applicata la penna al punto medio d'una corda, non può questa adattarsi alla curva isocrona bilanciata di un ventre solo; perchè nella prima vibrazione non s'impiegherebbe quel tempo, che esige la sua natura. Questa è la ragione, per cui col suono della corda totale sono sempre misti quelli delle sue parti aliquote. Si accomoda la corda alla curva composta di più semplici, che più si avvicina alla primitiva figura, e per conformarsi alla quale la forza tendente la detta corda eserciterà la minima azione

Sei Lettere formano la seconda Dissertazione, cinque dell'Ab. Vincenzo mio fratello, ed una mia, le quali trattano dei logaritmi de' numeri negativi. Colla lettura di esse resterà convinto il Sig. Ab. Bessuti, che mio fratello avea letta, ed esaminata la Memoria dell'Eulero, in cui determina tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo, e comprenderà che ridotta

a

a perfezione la soluzione del mentovato problema resta confermata la sentenza di Giovanni Bernoulli che l'Autore credeva di aver dimostrata falsa. Della correzione dei miei Schediasmi contenuti negli ultimi Tomi del Giornale sono rimasto molto contento, essendo corsi pochissimi errori, e questi facilmente riconoscibili da chi ha pratica di calcolo. Ho letto con sommo piacere l'Estratto dell'Elogio del Cavalieri scritto da mano maestra, e con lodevolissima disinvoltura. Il Sig. Ab. Frisi poteva risparmiare quelle invettive, che sono fuori di luogo, e gli fan poco onore. Se Ella mi trova abile a servirla, mi onori de' suoi preziosi comandi, e mi consideri quale mi glorio di essere col maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma [illegible]

Treviso [illegible] Genn.o 1779

Ill.mo Sig. Ab. Domenico Troili Modena

Div.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Conte Pron.e Col.mo

Ho letto con moltissimo mio piacere le 5 lettere sua celebre giornale.

Ill.mo Sig.r Conte Pron.e Col.mo

Ho letto con moltissimo mio piacere le 5 lettere sulla celebre questione de' logaritmi appartenenti ai numeri negativi; e mi è paruto che l'argomento sia stato trattato con tutta la dignità, e colla maggiore chiarezza, onde non possa più cader dubbio sulla realità del ramo negativo della logistica. Ciò nondimeno Ella mi permetterà, che io muova alcun dubbio sopra alcune cose, che stanno nelle lettere inserite, e mi farà poi grazia di sciogliere le mie difficoltà, ond'io resti affatto pago e contento.

Nella lettera 4.a il nostro Conte Vincenzo per escludere, che sia unico il valore della base e della logistica contro il sentimento del Cav.re de Foncenex, riflette, che il nulla può avere qualunque fattore numerico, e non solamente l'unità, come suppone il lodato Autore. Io accordo volentieri al Conte Vincenzo, che zero può nascere da 1-1, da 2-2, da 3-3 &c, ma non credo, che nascendo un tal zero dalla posizione, e successiva negazione di una quantità si possa considerare questo medesimo zero come risultante dalla posizione e successiva negazione di qualunque altra quantità. Il zero del Sig.r de Foncenex nasce precisamente da 1-1, dunque non può nascere da 2-2, da 4-4, come mostra di credere il fu Sig.r suo Fratello. Per provare evidentemente, che col metodo del Piemontese non abbiamo altro che un sol valore di e, io instituisco un calcolo simile al suo sulla formola generale $dy = \frac{c^m y dx}{x^m}$, la quale integrata per modo, che quando $x = f$, sia $y = 0$ dà $f^{-m+1} - \overline{m+1}\, xy = x^{-m+1}$, ovvero, fatto per brevità $m+1 = n$, $x = \overline{f^n + \frac{ny}{c^m}}^{\frac{1}{n}}$; ed elevando i membri dell'equazione alla podestà $\frac{f}{y}$.

che ... si assegnano varie quantità ... per esempio $y = f$, $x = a$, $m = n$, e ne risulterà $\overline{n.0 + \frac{n.0.f}{c}}^{\frac{1}{n.0}} = \pm a$. Ponendo n ... $\overline{n.0 + \frac{a.0.f}{c}}^{\frac{1}{0}} = a$, e quindi ... $n = 4$ si troverà $\overline{4.0 + \frac{4.a.f}{c}}^{\frac{1}{4.0}} = \pm a = \pm a\sqrt{-1}$

Sig.r de la Grange, che dall'Accademia di Torino è passato a quella di Berlino ha certamente nome Luigi

$x^{\frac{f}{y}} = \overline{f^n + \frac{ny}{c^m}}^{\frac{f}{ny}}$: Gittato il binomio in una serie col noto canon

avremo $x^{\frac{f}{y}} = f^{\frac{f}{y}} \times \Big(1 + \frac{f^{1-n}}{c^m} + \frac{f^{2-2n}}{2c^{2m}} + \frac{f^{3-3n}}{2\cdot 3 c^{3m}} + \&c$

$- \frac{ny \times f^{1-2n}}{2c^{2m}} \quad \frac{3ny \times f^{2-3n}}{2\cdot 3 c^{3m}} + \&c$

$+ \frac{2n^2y^2 \times f^{1-3n}}{2\cdot 3 c^{3m}} + \&c$

$+ \&c$

$+ \&c.$

Nella 2ª linea orizzontale tutti i termini sono moltiplicati per n, terza per n²; per n³ nella quarta, e così discorrendo. Dunque, m=1, cioè, quando n=0, tutto svanisce, fuorchè la serie pri la quale modificata alla nostra ipotesi diventa

$x^{\frac{f}{y}} = f^{\frac{f}{y}} \times \Big(1 + \frac{f}{c} + \frac{f^2}{2c^2} + \frac{f^3}{2\cdot 3 c^3} + \dots$; ovvero, fatta la s $= \frac{e}{f}$, nasce $x^{\frac{f}{y}} = f^{\frac{f}{y}} \times \frac{e}{f}$, equazione, che dà il valore di x e trovato dal Fontener.

Nella lettera V il Co. Vincenzo condanna di oscurità il Sig. la Gran che mi dicono, abbia nome Luigi, e non Filippo, dove dice, il settor iperbolico dell'ascissa $CM = x = Cc.\varphi$, e dell'ordinata M $= \sqrt{-1}\, Sc.\varphi$, viene espresso da $\frac{r\varphi\sqrt{-1}}{2}$. Ma io credo, che qu supposta oscurità svanirebbe, qualora si considerasse rappresent generalmente φ l'arco o reale, o immaginario del circolo, sec

...l'ascissa è minore o maggiore del semiasse CA, potendosi giustamente in tal caso esprimere il settore reale CAP dell'iperbola colla formola $\frac{vq\sqrt{-1}}{2}$

Vengo ora alla VI lettera, in cui Ella sostituisce al metodo del Co. Vincenzo un altro, che le sembra più brevemente provare la realità dei logaritmi de' numeri negativi. Se non prendo sbaglio, il suo modo di raziocinare è questo. Qualunque sia il logaritmo y, che si prende, si potrà prendere un logaritmo h, che stia a y come un numº. pari a un numº. dispari; imperciocchè o y è un numº. dispari, o un numº. pari. Se dispari, si può stabilire la h con qualunque numº. della serie 2, 4, 6 &c, o anche colle frazioni $\frac{2}{n}$, $\frac{4}{n}$, $\frac{6}{n}$ &c intendendo, che n sia numº. dispari. Se pari, mi sarà sempre lecito di prendere per h un altro pari tale, che stia h : y come un pari a un dispari. Per esempio, se y è 2, o 6, prendo h = 4, se y è 4, prendo h = 8, e così discorrendo. Ciò posto, egli è certo, che avrò sempre da estrarre una radice d'indice pari nell'equazione alla curva, e quindi avrò il numº. positivo e negativo. Le coordinate h, y sono indeterminate, o, dirò così, semiarbitrarie, che variano secondo l'opportunità delle ipotesi, che convengono a' positivi e reali logaritmi y.

L'idea certamente mi sembra felice, è tale, che non possa ammettere eccezione; anzi con essa mi pajono sempre più confermate le teorie dell'illustre Fratello. Io però non veggo nel metodo di questo Signore alcuno per ragione della formola $e = f \times 1 + \frac{f}{c} + \frac{f^2}{2c^2}$ &c. Perchè rifletto, che questa formola deriva dalla generale

$$mf + xc = A + \frac{Az}{c} + \frac{Az^2}{2c^2} + \frac{Az^3}{2\cdot 3c^3} \text{ \&c}$$

in cui si determina la A colla [illegible]

chè ad m si assegnano varj gradi [illegible] ... per esempio $y = f$, $x = a$, $m = 2$, e ne risulterà $\left[2\cdot 0 + \frac{2\cdot 0\cdot f}{c}\right]^{\frac{1}{0}} = a$, e quindi $\left[2\cdot 0 + \frac{2\cdot 0\cdot f}{c}\right]^{\frac{1}{2\cdot 0}} = \pm a$. Ponendo $m = 4$ si troverà $\left[4\cdot 0 + \frac{4\cdot 0\cdot f}{c}\right]^{\frac{1}{4\cdot 0}} = \frac{\pm a}{\pm a\sqrt{-1}}$.

Il Sigr. de la Grange, che dall'Accademia di Torino è passato a quella di Berlino ha certamente nome

Luigi

20

P.S. A riporto della presente, manderò subito al Sig. Ab. Troili l'involto, e la pregherò di perdono, se non ho potuto servirla quella puntualità che Ella merita. Ella non valuti su questa [...]za la quantità del mio rispetto per Lei, che è grande ed incircon[...]bile e mi conservi la sua Padronanza

sola ipotesi, che fatto $z=0$, sia $x=0$; Ma se zero non è l'un[...] valore di x nella supposizione di $z=0$, ma infiniti siano i su[...] valori, come per altra via si dimostra, è certo, che infiniti saranno le determinazioni di A; e però, posto $mf+x=e$ [...] sà sempre $z=f$, infiniti saranno eziandio i valori di e

Nel poscritto Ella dice, che, per ottenere l'intero ramo de' num[...] negativi, basta il determinare le due coordinate g, h colla condizione, che h s'eguagli ad un num. pari, onde s'abbia $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = \pm f\sqrt[h]{\left(\frac{g}{f}\right)^{y}}$. Ma non potrebbe alcun dire, che in[...] i casi, in cui y sia pari, se non si riduce l'esponente $\frac{y}{h}$ a[...] mi termini, si viene a introdurre, in vece d'una, due curve si[...] ed eguali tra loro, ma affatto tra loro independenti? Per prova[...] questo, non potrebbesi dar l'esempio tolto dall'equazione $a^2x=$[...] che è alla s. parabola cubica? Supponiamo, che in vece di [...] y^3, si scrivesse $y^{\frac{6}{2}}$, onde l'equazione sia $a^2x=y^{\frac{6}{2}}$, cioè $a[...]$ $= \pm\sqrt{y^6} = \pm y^3$. Ella vede, che questa equazione porta a d[...] parabole cubiche eguali situate diversamente; e che nel nostro caso l'una non dipende niente dall'altra. Si potrebbe mai [...] che le si dicesse, non essere altro il ramo negativo della log[...] da Lei trovato, altro che un duplicamento improprio della me[...]ma curva?

Io la prego di riflettere a tutte queste cose; e a dirmi ingenu[...]te il suo sentimento.

Ho scorso pure le due lettere al Co. Fenaroli, e nella supposizione, [...] siansi altrove dimostrate alcune cose, che quivi Ella asserisce, mi p[...] che tutto cammini a dovere, e che Ella con moltissimo ingegno va[...] ogni di più promovendo la difficile Teoria delle corde. Io sono con tutto [...]

Altra di Giord. Riccati al Sig. [illegible] 25

[illegible] risponde alle istanze fattegli dal Sig. Co. [illegible] e induzione alla stampa delle opera musicale di C. [illegible] che

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Colmo 21

Treviso 15. Genn.o 1779.

La difficoltà, che Ella dottamente propone sopra la Lettera quarta dell'Ab. Vincenzo mio fratello, sembrami che si possa sciogliere così. Preso f per protonumero nella logistica della suttangente c, l'equazione di una tal curva esser dee $y = c \cdot \frac{x^{m\cdot o} - f^{m\cdot o}}{m\cdot o}$; in cui m significa qualunque numero. E voglia il vero differenziando si troverà $dy = c \cdot \frac{m\cdot o\, x^{m\cdot o - 1}\, dx}{m\cdot o} = \frac{c\,dx}{x}$ ch'è la consueta equazione differenziale della logistica. Dalla predetta formola si raccoglie $f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c} = x^{m\cdot o}$, ed estraendo la radice $m\cdot o$ si ha $\left(f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c}\right)^{\frac{1}{m\cdot o}} = x$. S'alzi l'equazione alla podestà $\frac{f}{y}$, e ci si presenterà $\left(f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c}\right)^{\frac{f}{m\cdot o\cdot y}} = x^{\frac{f}{y}}$; e conseguentemente $\sqrt[m]{\left(f^{o} + \frac{oy}{c}\right)^{\frac{f}{oy}}} = x^{\frac{f}{y}}$, ovvero $\left(f^{o} + \frac{oy}{c}\right)^{\frac{f}{oy}} = x^{\frac{mf}{y}}$, formola che fa vedere, che assegnati ad x, e ad y due relativi valori, può il binomio $\left(f^{o} + \frac{oy}{c}\right)^{\frac{f}{oy}}$ ricavarne infiniti secondo-chè ad m si assegnano varie grandezze. Sia per esempio $y = f$, $x = e$, $m = 2$, e ne risulterà $\left(f^{2\cdot o} + \frac{2\cdot o\cdot f}{c}\right)^{\frac{1}{o}} = e^{2}$, e quindi $\left(f^{2\cdot o} + \frac{2\cdot o\cdot f}{c}\right)^{\frac{1}{2\cdot o}} = \pm e$. Ponendo $m = 4$ si troverà $\left(f^{4\cdot o} + \frac{4\cdot o\cdot f}{c}\right)^{\frac{1}{4\cdot o}} = \pm e,\ \pm e\sqrt{-1}$.

Il Sig. De la Grange, che dall'Accademia di Torino è passato a quella di Berlino ha certamente nome

Luigi

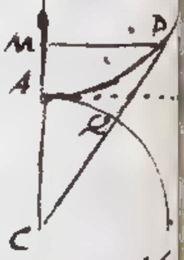
20

P.S. A risposta della presente, manderò subito al Sig. Abate ... l'involto, e la pregherò di perdono, se non ho potuto servirla con quella puntualità che Ella merita. Ella non valuti su questa ... la quantità del mio rispetto per Lei, che è grande ed incirconscrivibile: e mi conservi la sua Padronanza.

sola ipotesi, che fatto $z=0$, sia $x=0$; Ma se zero non è l'unico valore di x nella supposizione di $z=0$, ma infiniti siano i ...

22

Luigi; ma io credo che ci sia un altro Sig. de la Grange per nome Filippo, il quale mentre il Sig. Luigi era ancora a Turino nel 1761 veniva chiamato dal Sig. de Foncenex il Sig. de la Grange dell' Accademia di Berlino. Il settor iperbolico ACP s'eguaglia ad $\frac{rq}{2}$, e non ad $\frac{rq\sqrt{-1}}{2}$, espressione, che soltanto compete al settor iperbolico immaginario contenuto nell' angolo CAR. Non altrimenti il settor circolare ACQ s'eguaglia ad $\frac{r\varphi}{2}$, e non ad $\frac{r\varphi\sqrt{-1}}{2}$, la qual espressione unicamente appartiene al settor circolare immaginario contenuto nell' angolo MAR. Sembrami, che questa verità meritasse d'essere posta in chiaro per levare gli equivoci. Ella osservi, che nel settore iperbolico immaginario $\frac{r\varphi\sqrt{-1}}{2}$ ci entra l'arco circolare immaginario $\varphi\sqrt{-1}$, e nel settore circolare immaginario $\frac{rq\sqrt{-1}}{2}$ ha luogo il logaritmo analogo immaginario $q\sqrt{-1}$.



Il mio modo di raziocinare contenuto nella Lettera VI. è stato da Lei ottimamente compreso, ed avendo ottenuta la sua approvazione, mi lusingo che metta in maggior lume la realtà dei logaritmi dei numeri negativi in tanti modi provata da me

Fratello

Altro del Sig.r Conte ... [illegible]   n 5

Io ringrazio [illegible] rispetto alle istanze fattemi dal Sig.r P. Boaldo e insieme [illegible] dello opera musicale di V. S. Ill.ma, che

n 3

fratello. Concedendo, che ad e competano infiniti valori, dico solamente, che se nella equazione generale $f+x = f\cdot 1+\frac{z}{c}+\frac{z^2}{2\cdot c^2}+\frac{z^3}{2\cdot 3\cdot c^3}+\frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot c^4}$ &c si farà $f+x = e$, $z = f$, ne nascerà la formola

$$e = f\cdot 1+\frac{f}{fc}+\frac{f^2}{2\cdot c^2}+\frac{f^3}{2\cdot 3\cdot c^3}+\frac{f^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot c^4}\ \&c.,$$

in cui sendo dati f, c, la base e non può avere salvochè una sola grandezza. La logaritmica ha due proprietà, che al logaritmo z dell'assissa, o numero $f+x$ competono infiniti valori; e che allo stesso logaritmo z spettano infiniti numeri. Se nella equazione generale collocherò in cambio di z qualunque suo valore relativo al numero e, manterrà sempre questa la stessa misura. Per ritrovare i valori infiniti della base per esempio $e^{\sqrt{-1}}$ egli è di uopo sostituire nella formola generale $f^{\sqrt{-1}}$ in vece di f, ed f in cambio di z, onde si abbia

$$f^{\sqrt{-1}}+x = e^{\sqrt{-1}} = f^{\sqrt{-1}}\cdot 1+\frac{f}{fc}+\frac{f^2}{2\cdot c^2}+\frac{f^3}{2\cdot 3\cdot c^3}+\frac{f^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot c^4}\ \&c.$$

equazione patentemente giusta, e conveniente alla nostra logistica, che fra gli infiniti protonumeri accetta $f^{\sqrt{-1}}$.

Di fatti penso esser sempre $f\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = \pm\sqrt[h]{\left(\frac{a}{f}\right)^{y}} = x$ quando h è numero pari anche nella circostanza che y sia numero impari, e che la frazione ridotta $\frac{y}{h}$

20

P.S. A riporto della presente, manderò subito al Sig. Ab. Trivili l'involto, e la pregherò di perdono, se non ho potuto servirla con quella puntualità che Ella merita. Ella non valuti su questa ... la quantità del mio rispetto per lei, che è grande ed incircon... bile, e mi conservi la sua Padronanza

...la ipotesi, che fatto $z=0$, sia $x=0$; Ma se zero non è l'uni... valore di x nella supposizione di $z=0$, ma infiniti siano i su...

24.

$\frac{y}{h}$ si eguagli ad $\frac{m}{n}$, in cui n pareggi un numero impari: Se si verifica la formola $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = \pm\sqrt[h]{\left(\frac{g}{f}\right)^{y}}$ nei casi di y impari, sordo, ed anche fratto in ...tissima circostanza, credo che si abbia da avver... anche quando y è pari, tanto più, che se non ... duco la frazione $\frac{y}{h}$ io mi servo di quei logaritmi h, y che sono proprj dei numeri g, x, e se per esempio mi vaglio dei logaritmi $\frac{h}{2}, \frac{y}{2}$ non sono questi relativi ai numeri predetti g, x. La formola $a^4x^2 = y^6$ mi dà una curva del sesto grado fornita di quattro rami rea... i quali tutti alla stessa curva appartengono. Estraendo la sesta radice ho $\sqrt[6]{a^4x^2} = \pm y$, e potendo nascere x^2 da $\pm x$, alzato al quadrato chiaramente si vede, che $\pm y$ può corrispondere a $\pm x$ onde la curva sia da quattro rami composta. Non altrimente alla equazione $a^4 - 2a^2x^2 + x^4 = y^4$ si riferisca una curva del quarto grado composta dal circolo, e dalla ipe... potendo aver l'origine $a^4 - 2a^2x^2 + x^4$ tanto da $(a^2-x^2)^2$, quanto da $(-a^2+x^2)^2$.

La lettera è divenuta assai lunga. Io le porgo mille ringraziamenti per tanti disturbi, e quando appagata di ciò che le ho scritto, la prego a mandar l'involto al Sig. Ab. Trivili, e a credermi qual mi pregio

Divot. Obbl. Serv.
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Mafatti
Ferrara.

Altro di Cesena Sig. ... n. 5

Io compiacerei Volentieri a rispondere alle istanze fattemi dal Sig.r P. Scaldo e indurlo alla stampa dell'opera musicale di V. S. Ill.ma; che certamente non è in caso di assumere tale impresa; ma che fosse un suo Corrispondente ed appaltatore, se gli fossero opportune le condizioni. Dichiara dunque se in quest'opera ci sono Rami, e se questi possino essere fatti da' Autore. Ella mi scrisse, che non ci sono che note Musicali e così si scriverà. Ma si teme che a Firenze non ci siano i caratteri e il comodo della ultima incisione necessarj per una [illegible] ... [illegible] il P. Scaldo, che il P. M. Vallotti le a fatti [illegible] a [illegible], e che il dispendio non è molto grande, avendo [illegible] una lettera di quattro grande. Per questo però s'intenderanno meglio col Sig.r Gibonjo: solo Ella, che mi dica se mai inclinasse a tale spesa, supposto che non fosse possibile di stampare la di Lei Opera senza questa condizione. Abbiamo anche divisato fra noi per facilitare lo affare di proporre un numero di Associati al Gibonjo stampatore, ossia di ricevere un detto numero di Copie. Sarebbe perciò bene, che

Sig. Arcip.te Giambattista Nicolai. Padova

Divot.mo Obblig.mo Servitore
Giordano Riccati

ci scrivesse per quanto giusto a poco più, volesse impegn[illegible]
assicurandola che ci avrà sempre la attenzione per ridurlo
quanto minor numero si potrà, e tutta la diligenza per
fare il maggior numero possibile di Associati. Ella sarebbe
ben sapere [illegible] la mia intenzione nella speranza [illegible]
il numero degli Associati, che potesse provvedere di [illegible]
mancarsi. Prego [illegible] l'ultima di spedirmi una
sicura informazione dell'opera a lume della stampa
[illegible] si spedirà a Firenze e risposta a ciò che la chiedo
lunedì prossimo per la Posta, [illegible] la risp[illegible]
[illegible] scrivere le condizioni, ed
incontro il maneggio. Desidero che l'Analisi si pubblichi
[illegible] di sommo onore per lei, e di grande utilità [illegible]
pubblico. Finisco i miei rispetti a V.S. Ill.ma, ed a tutta la
sua famiglia e come anche dal P. [illegible], e rispettosamente mi [illegible]

16 Giu. 79 Padova [illegible]

P.S. Il Sig.r Conte [illegible] la [illegible] 4. D. V. S. Ill.ma Dev.mo Obbl.mo [illegible]

[illegible]

quarto grado composta [illegible]
potendo aver l'origine $a^4 - 2a^2x^2 + x^4$ tanto da
$(a^2 - x^2)^2$, quanto da $(-a^2 + x^2)^2$.
La lettera è divenuta assai lunga. Le fo pure
mille ringraziamenti per tanti disturbi, e quando
appagata di ciò che le ho scritto, la prego a mandare
l'involto al Sig. Ab. Troili, e a credermi qual mi protesto
Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti Divot.mo Obbl.mo Serv.
Ferrara. Giordano Ricc[illegible]

Ill.mo Sig. Arcip.te Giambatista Nicolai. Padova

Divot.mo Oblig.mo Servitore
Giordano Riccati

quarto grado composta [illegible], potendo aver l'origine $a^4-2a^2x^2+x^4$ tanto da $(a^2-x^2)^2$, quanto da $(-a^2+x^2)^2$.

La lettera è divenuta assai lunga. Io le porgo mille ringraziamenti per tanti disturbi, e quando appagata di ciò che le ho scritto, la prego a' mandarli involto al Sig. Ab. Troili, e a credermi qual mi [illegible]

Divot.mo Obbl.mo Serv.

Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti

Ferrara.

Ill.mo Sig.r Conte Sig.r Pron Col.mo 29 41

Sig.r Arcip.te Riv.mo 27

L'inchiusa carta, che se lo Stampatore di Vicenza intraprende l'edizione della mia Opera, gli potrà servire di Manifesto, contiene una quanto basta chiara informazione dell'Opera stessa. Gli esempj musicali sono incorporati nell'Opera, e perciò si rendono necessarj i caratteri a piombo dell'ultima invenzione. Il Sig.r Petronio dalla Volpe in Bologna ha le forme di tali caratteri, e ne vende a chi ne vuol fare acquisto. Se lo Stampatore ne facesse la provisione, gli potrebbero servire per altre edizioni di libri di questo genere. Ella consideri unitamente collo stimat.mo Sig.r D. Toaldo se sia sufficiente l'assicurare il Librajo dell'esito di cinquanta copie, confidando coll'ajuto degli Amici di trovare cinquanta Associati. Io sono infinitamente obbligato all'interesse, che Ella col Sig.r D. Toaldo si prendono per la pubblicazione del mio Trattato, e pregandola di portargli i miei complimenti, pieno di vera stima mi sottoscrivo

Di Lei Sig. Arcip. Riv.mo

Treviso 19. Gen.o 1779

Ill.mo Sig. Arcip.te Giambatista Nicolai. Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

2 46

[illegible]

Ill.mo Sig.r Conte Sig.r Pron. Col.mo 29 41

ciò non
tami im=
ttengl= =
laz Vinz
piacerà =
includere
sio dell
il stesso.
$2\sqrt{-1}$ =
caso di
dell deno
numera
è reale
ndo =
ri della
$2\sqrt{-1}$.
mio di

Se [illegible]
eguar[illegible]
l'in[illegible]
solu[illegible]
lo [illegible]
Qu[illegible]
cosi[illegible]
ix [illegible]
che [illegible]
che [illegible]
la [illegible]
anc[illegible]
di[illegible]
esca[illegible]
far[illegible]
in [illegible]
di [illegible]
sem[illegible]
rat[illegible]
bi [illegible]

non [illegible]
man[illegible]
ma [illegible]
num[illegible]
abb[illegible]

Se l'equazione $dy = \frac{cdx}{x}$ avesse l'istessa identica integrazione che l'altra equazione $dy = \frac{cmdx}{mx}$, quando si voglia conservare e per l'una e per l'altra l'istesso protonumero f, io non avrei difficoltà alcuna ad ammettere la soluzione, che Ella dà nella sua compitissima lettera. Ma, insegnandomi lo stesso Co. Vincenzo nella sua lettera II, che le due sud.e equazioni danno due sistemi diversi di logaritmi, ne' quali è diverso il protonumero, cosicchè ridotta la seconda integrazione al primo sistema, abbiamo $y = lx + lmf$, io non veggo, come possa soddisfare interamente la risposta, che Ella mi presenta. Tuttavia, siccome queste sono infine bazzecole, che non pregiudicano niente ai robusti argomenti addotti per provare la realità de' logaritmi corrispondenti ai numeri negativi; e siccome conto ancor per bazzecole quegli altri due scrupoletti, che le ho indicati, così, senza differir maggiormente, lunedì manderò il M.s a Modena, e mi augurerò, che escano queste belle lettere alla luce senza quegli errori di stampa, che fanno piangere spesse volte gli Autori, quando leggono i loro Opuscoli inseriti in qualche Giornale. In qualunque altra occasione io possa aver l'onore di servirla, mi comandi con tutta la libertà, e creda che io mi farò sempre pregio di essere da lei considerato quale con distintissima stima mi ratifico

Di V.S. Ill.ma

Ferrara li 20 [illegible] 1779

Devot.mo Obblig.mo Servitor Vero
G. Franc.o de' Malfatti

...manta ha da essere una radice della nostra equazione. ma essendo essa di grado infinito, altre infinite di numero ne dee contenere. Fatto $1+\frac{y}{n} = 2$, onde s'abbia $2^n - 1 = 0$, dimostra l'Autore, che tutti i fattori

ciò non
altri im=
dell'angl =
l'asse vers
e piacevo
concluder =
dio dell
stesso,
$\sqrt{-1}$ =

l caso di
nell deno
numera
è reale
e non
vi della
$\sqrt{-1}$.
mio di

, ma
essendo
egli è

non si . . . una radice della nostra equazione.
menta ha da essere una radice della nostra equazione.
ma essendo essa di grado infinito, altre infinite di
numero ne dee contenere. Fatto $1+\frac{x}{n}=z$, onde
si abbia $z^n-1=0$, dimostra il Eulero, che tutti i
fattori

All' Nobile Sig.^r Sig.^r Padrone Col.^mo
Il Sig.^r Conte Giovanni Riccati

p Venezia a Treviso

a proposizione del Leibnitz, che 1, −1, +1 non siano continuamente proporzionali, è totalmente contraria alla
[illegible] detto che giudica [illegible] sulla continenza e

Per ben giudicare del metodo dell'Eulero, egli è di uopo rettificarne l'idea. Chiamato x il numero, y il logaritmo, e supponendo n uguale ad un dato numero infinito, fa $i = \frac{y}{n}$, e per conseguenza i proporzionale ad y, dimodochè quando $y = 0$, è parimente $i = 0$. Poichè essendo $ni = y$, ed $y = lx$, si scopre $ni = lx$. Fatta l'osservazione, che dy si può rettamente uguagliare ad i, cerchiamo il valore di dx. Essendo $= 1$ la suttangente della nostra logistica, egli è noto avverarsi la proporzione

$1 : x :: dy = i : dx = xi$, da cui si raccoglie

$dx = xi$, e s'impara, che l'incremento dx del numero x non può esser uguale ad i senon nell'unico caso, che sia $x = 1$.

Ma quantunque non sia generalmente $dx = i$, nulladimeno determinato relativamente ad y il valore di $i = \frac{y}{n}$, si avvera la formola dell'Eulero

$ni = n\,l(1+i) = l(1+i)^n$; imperciocchè $i = l(1+i)$, $2i = l(1+i)^2$, $3i = l(1+i)^3$ ecc. e finalmente $ni = l(1+i)^n$.

Da questa formola con un calcolo da lei approvato, cercando $ni = y$, $(1+i)^n = x$; perviene il celebre Autore alla seguente $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - x = 0$, e ponendo $x = 1$, trova $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$.

Ella sostiene esser assurda una tal equazione, quando non si supponga $\frac{y}{n} = 0$. Ed in fatti questa certamente ha da essere una radice della nostra equazione; ma essendo essa di grado infinito, altre infinite di numeri ne dee contenere. Fatto $1+\frac{y}{n} = 2$, onde si abbia $2^n - 1 = 0$, dimostra l'Eulero, che tutti i

fattori

fattori trinomiali possibili dalla funzione $z^n - 1 = 0$ si con-
tengono nella equazione $z^2 - 2z\,Cs.\frac{2\lambda p}{n} + 1 = 0$, in cui
p significa la semicirconferenza circolare del raggio
ed λ qualunque numero della serie 0, 1, 2, 3, 4 &c
Poichè $1 = Cs.\frac{2\lambda p}{n}^2 + Sn.\frac{2\lambda p}{n}^2$, avremo $z^2 - 2z\,Cs.\frac{2\lambda p}{n} + Cs.$
$= -Sn.\frac{2\lambda p}{n}^2$, ed estraendo la radice, $z - Cs.\frac{2\lambda p}{n} = \pm Sn.\frac{2\lambda p}{n}$
Pongo in luogo di z il suo valore $1 + \frac{y}{n}$, e riflettendo
essere $Sn.\frac{2\lambda p}{n} = \frac{2\lambda p}{n}$, fatte le debite operazioni tro-
$\frac{y}{n} = Cs.\frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, e trascurando la quanti-
relativamente nulla $Cs.\frac{2\lambda p}{n} - 1$, $y = lz = \pm 2\lambda p\sqrt{}$
Nega lo stimat.^mo^ Sig. Abate potersi negligentare la qua-
$Cs.\frac{2\lambda p}{n} - 1$, per quella stessa ragione, per cui ho a-
dato, che nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$ non è
cito trascurare la grandezza $\sqrt{-1}$, quando la tange
z si agguaglia ad un infinito relativo. La ragione
tuttavia non è pari in entrambi i casi. Nel secon-
il trascurare $\sqrt{-1}$ fa cangiar natura alla quantità
$\frac{-z \pm \sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$ cangiandola da immaginaria in reale
nel primo il negligere $Cs.\frac{2\lambda p}{n} - 1$ conserva all'
omogeneo di comparazione la qualità di imma-
nario; e perciò dall'essere illecito il cancellare
nel primo caso, non si conchiude doversi trattare
di ommettere nel secondo $Cs.\frac{2\lambda p}{n} - 1$. Oltre
trascurando $Cs.\frac{2\lambda p}{n} - 1$, mi si presenta que-
stessa formola $lz = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$, che mi viene su-
ministrata dalla certissima equazione $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\left(\frac{-z-}{z-}\right)$
egli è noto, che quando la tangente $z = 0$, l'ar-
circolare $u = \pm \lambda p$; ma in tale ipotesi $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} =$

Dun-

proposizione del Leibnitz, che 1, −1, +1 non siano continuamente proporzionali, è totalmente contraria alla ... che si dice. Sulla continenza è

33

Dunque $\pm \lambda p = \frac{\sqrt{-1}}{n}\, lt$, e quindi $\pm n\lambda p \sqrt{-1} = lt$ come sopra. Il perchè tacitamente è stata da me trasandata la quantità $lc.\, \frac{n\lambda p}{n} - 1$, e rettamente ho conchiuso essere $lt = \pm n\lambda p \sqrt{-1}$.

Ella mi accorda la verità della formola $z^n - x = 0$, ed avendo io dimostrato, che fatto $z = \frac{y}{n}$, x è capace di tutti i valori dall'unità sino all'infinito, sarà egualmente vera, ponendo $x = 1$, anche la formola $z^n - 1 = 0$. Ora una formola espressa in modo, che l'omogeneo di comparazione sia $= 0$; si eguaglia al prodotto di tutte le sue radici similmente espresse, e perciò ciascuna $= 0$, il cui numero è $= n$ grado dell'equazione. La nostra formola, se n è dispari, nasce dal moltiplicare il binomio del primo grado, o sia la radice $z - 1$ pei trinomj $z^2 - 2z\, lc.\, \frac{n\lambda p}{n} + 1$, il cui numero $\frac{n-1}{2}$. Quindi ne segue, che contenendo ciascun trinomio due radici, il numero di esse contenute nei trinomj sarà $n - 1$, ed aggiungendo la radice $z - 1$, ne risulterà il numero totale $= n$. Che se n è pari, la formola viene formata dal prodotto dei trinomj $z^2 - 2z\, lc.\, \frac{n\lambda p}{n} + 1$, il cui numero $= \frac{n}{2}$, onde ne provenga il numero delle radici $= n$. Dall'una, e dall'altra ipotesi, essendo ogni trinomio il prodotto di due radici ciascuna $= 0$, necessariamente addiviene che ogni trinomio pareggi il nulla. Che poi le radici, che ascendono al numero n, siano reali, o immaginarie, ciò dipende dalla natura dell'equazione.

Mi

Mi metto sotto gli occhi l'equazione $z^6 - a^6 = 0$ da Lei
presa in esempio. È questa formata dai tre fattori
del secondo grado ognuno = 0 insieme moltiplic[ati]
$(z^2-a^2).(z^2-az+a^2).(z^2+az+a^2)=0$, e ciascun fattore
consta di due radici ambe = 0, dimodochè le sei
radici sono due reali $z-a=0$, $z+a=0$ e quattro
immaginarie $z-(\frac{1}{2}a+a\sqrt{-\frac{3}{4}})=0$, $z-\frac{1}{2}a+a\sqrt{-\frac{3}{4}}=0$, $z=$
$+\frac{1}{2}a-a\sqrt{-\frac{3}{4}}=0$, $z+\frac{1}{2}a+a\sqrt{-\frac{3}{4}}=0$. Ella dice, che z, ed a
sono quantità reali. Ciò è certo in riguardo ad a
che si è assunta reale, ed essendo costante non può
cangiar valore. Ma la z grandezza incognita
esser dee fornita di sei valori, e la formola
$z^6-a^6=0$ richiede, che due siano reali, e quattro
immaginarj.

Applichi il discorso alla formola $z^n-1=0$, in cui
si suppone infinita. Se per esempio sia n impari
la nostra formola avrà una sola radice reale $z-1=0$
e tutte l'altre infinite immaginarie
$z-Co.\frac{\lambda p}{n}\pm Se.\frac{\lambda p}{n}\sqrt{-1}=0$, eccettuata la due
di $\lambda=0$; perchè in tal caso si annulla la quantità
immaginaria $\pm Se.\frac{\lambda p}{n}\sqrt{-1}$

Da quanto ho scritto raccoglierà il ch. Sig. Abate la mia
cara rispettosa opinione intorno al metodo del
Eulero, che inteso secondo la mente del suo Inventore
io giudico esattissimo. La settimana ventura rispo[nderò]
darò alla riputatissima sua Lettera dei 2. Gen.o e con
la maggiore stima, e rispetto mi dichiaro

Di V.S. Ill.ma

Treviso 22 Gennaro 1779

Divot.mo Obblig.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe
Calandrelli. Roma

La proposizione del Leibnitz, che 1, −1, +1 non siano continuamente proporzionali, è totalmente contraria alla verità secondo quello che giudico. Sulla convenienza è fondata la proporzione geometrica. Ci siano due coppie di termini, e se gli antecedenti contengono egualmente i conseguenti, i quattro termini sono geometricamente proporzionali. La misura di questa convenienza si trova dividendo l'antecedente pel conseguente, e se le due frazioni sono eguali, ci insegna una tale eguaglianza, che sendo eguali da un canto e dall'altro le convenienze, i quattro termini esistono in proporzione geometrica. Abbiansi i quattro termini 2, 3, 4, 6, e perchè $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ il primo termine contiene due terze parti del secondo, in quella guisa, che il terzo termine contiene due terze parti del quarto. Uguagliandosi adunque le convenienze, avremo 2 : 3 :: 4 : 6.

Consideriamo presentemente i quattro termini 1, −1, −1, +1; e poichè $\frac{1}{-1} = -1$, $\frac{-1}{1} = -1$, si scoprono eguali le convenienze, ed essendo per conseguenza 1 : −1 :: −1 : 1, le tre quantità 1, −1, +1 si riferiscono in continua proporzione geometrica. E in fatti siccome 1 contiene −1 una volta negativamente, così −1 contiene 1 negativamente una volta. Se pure non prendo errore, mi sembra che questa sia un'evidentissima dimostrazione.

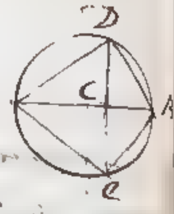
L'equazione al circolo del raggio eguale all'unità cioè $x \cdot \overline{2-x} = y^2$ mi documenta, che all'assissa

AC

relazioni, può il binomio √ [illegible] $\frac{m \cdot a \cdot y}{c}$) a·y infiniti, secondochè ad m si attribuiscono varie grandezze.

Non ripeto gli esempj allegati nella precedente mia lettera. Dopo queste riflessioni io mi lusingo,

ch'i

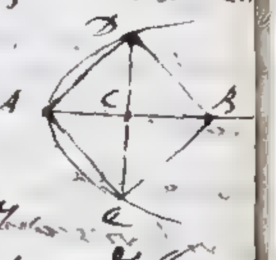


AC = x si corrispondono due ordinate uguali CD = y, CE = y, ed essendo simili le coppie di triangoli ACD, DCB; ACE, ECB, ne nascono due analogie

AC : CD :: CD : CB, AC : CE :: CE : C

x : y :: y : 2 − x, x : −y :: −y : 2

che entrambe somministrano la stessa equazione al circolo $2x - x^2 = y^2$. Da Lei si riflette, che siccome CE = −y, perchè in posizione contraria di CD = y; così CB ha da considerarsi come negativa, perchè in posizione contraria di AC = x. Ella osservi frattanto, che CB = 2 − x è il residuo che rimane detraendo dal diametro AB = 2 l'assissa AC = x, nè si può dire situata contrariamente rispettivamente ad AC. Se x = 1, sarà parimente y = 1, e la seconda analogia prenderà il seguente aspetto 1 : −1 :: −1 : 1, onde anche la geometria conferma essere 1, −1, −1, 1 in continua proporzione geometrica.



Anche la parabola esige, che alla stessa AC = x si riferiscano due ordinate uguali situate contrariamente CD = y, CE = −y. Segnata CB = 1 parametro della no[stra] parabola, saranno simili le due coppie di triangoli ACD, DCB; ACE, ECB, e ne risulteranno le analogie

AC : CD :: CD : CB, AC : CE :: CE : C

x : y :: y : 1, x : −y :: −y : 1

l'una

io giudico esattissimo. ... Darò alla riputatissima sua Lettera dei 2 Gen°. e con[...] la maggiore stima, e rispetto mi dichiaro

Di V.S. Ill.ma

Treviso 22 Febbraio 1779

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

l'una e l'altra dalla quali mi dà l'equazione alla
due prendansi in qualità di positive, perchè
nostra parabola $x = y^2$. La linea CB, ha la stessa
direzione della linea AC, segnandosi entrambe
da A verso B. Oltrediché se CB si considerasse
come negativa, ne nascerebber l'analogie
$AC : CD :: CD : CB$, $AC : Ca :: Ca : CB$
$x : y :: y : -1$, $x : -y :: -y : -1$
dalle quali ne proverrebbe l'assurda equa-
zione $-x = y^2$. Dalla vera analogia
$x : -y :: -y : 1$, fatta $x = y = 1$ ne risulta
$1 : -1 :: -1 : 1$, che resta vie più confermata.
Sosterrà sempre la geometria, che la media
proporzionale fra due grandezze, sia sempre
fornita di due valori uguali, uno positivo, e
l'altro negativo. Ed al solito ho l'onore di
protestarmi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 29. Gen.o 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe
Andreoli. Roma.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati.

relativi, può il binomio $\sqrt{\quad \frac{\pm m \cdot a \cdot y}{c}) a \cdot y}$ --
infiniti, secondochè ad m si attribuiscono varie grandezze.
Non ripeto gli esempj allegati nella precedente
mia lettera. Dopo queste riflessioni io mi lusingo,
[illegible]

io giudico esattissimo. [illegible]
dare alla veneratissima sua Lettera dei 2 Genn.° e con
la maggiore stima, e rispetto mi dichiaro

Di V. S. Ill.ma

Treviso 22 Gennaro 1779.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe
Calandrelli. Roma

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 39

Non vi ha dubbio, che se le due formole $dy = \frac{c\,dx}{x}$, $dy = \frac{cm\,dx}{mx}$ appartenenti alla logistica della suttangente c si integrano senz'aggiungere costante nel modo seguente $y = lx$, $y = lmx$, ci danno esse due diversi sistemi di logaritmi, i cui protonumeri stanno come $1 : m$. Ma se la seconda formola si integra coll'aggiunta dell'opportuna costante, onde si abbia $y = lmx - lmf$, ci somministra anch'essa il sistema di logaritmi del protonumero f; imperciocchè, fatto $x = f$, si trova $y = 0$. Di tal proprietà è fornita la formola $y = c\cdot\left(\frac{x^{m\cdot o} - f^{m\cdot o}}{m\cdot o}\right)$, nella quale parimente $y = 0$ si riferisce ad $x = f$. Effettuate le operazioni prescritte dal Sig. Cav. de Foncenex, si perviene all'equazione $\left(f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c}\right)^{\frac{1}{m\cdot o}} = x$, ed alzando alla podestà $\frac{f}{y}$, ci si presenta $\left(f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c}\right)^{\frac{f}{m\cdot o\cdot y}} = x^{\frac{f}{y}}$, e conseguentemente $\left(f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c}\right)^{\frac{1}{o\cdot y}} = x^{\frac{mf}{y}}$, formola che dimostra, che assegnati ad x, e ad y due valori relativi, può il binomio $\left(f^{m\cdot o} + \frac{m\cdot o\cdot y}{c}\right)^{\frac{1}{o\cdot y}}$ accettarne infiniti, secondochè ad m si attribuiscono varie grandezze. Non ripeto gli esempj allegati nella precedente mia lettera. Dopo queste riflessioni io mi lusingo,

che

4 6

che Ella ammetterà la soluzione da me data dalla
colta da Lei accuratamente proposta sopra l'argomento
usato da mio Fratello contro il Sig.r Cav. de Fonce
Se mai valessi in servirla, Ella non mi risparmj, e
sappia, che in me si conserverà sempre viva quella
pienissima stima, con cui mi segno

Di V. S. Ill.ma

Trevisa a 9. Gen.o 1779

Ill.mo Sig. Giangirancesco
de Malfatti. Ferrara.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r e Pron Col.mo

Ill.mo Sig.r Sig.r e Pron Col.mo

Quantunque io non abbia l'onore d'essere conosciuto da V. S. Ill.ma, contuttociò non temo di presentarmi a un degnissimo figlio e fratello di due sommi Geometri immortali non meno delle loro virtù, che del profondo sapere. Io sono un sacerdote Bergamasco ultimo non per età, ma per merito fra i discepoli del Sig.r Conte Abate Vincenzo, e questa qualità mi aggiunge maggior coraggio. Ho letto con mio gran piacere e profitto nell'ultimo tomo del Giornale di Modena la sua bellissima e concludentissima risposta al Signor Abate Personti; ma il passo, ov'ella scuopre un abbaglio dell'Ill.mo Abate Vincenzo mi ha fatto nascere un dubbio, che non so risolvere da per me stesso. La formola $\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2} = \frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2+az\sqrt{-1}-az\sqrt{-1}}$; ma $az\sqrt{-1}-az\sqrt{-1} = \overline{1-1}\cdot\sqrt{-a^2z^2} = 0\sqrt{-a^2z^2}$, e $2az\sqrt{-1} = 2\sqrt{-a^2z^2}$: dunque nel caso di $z=0$ sarà la stessa formola $= \frac{-a^2+2\sqrt{-0}}{a^2+0\sqrt{-0}}$. Se $0\sqrt{-0}$ si trascura nel denominatore, non pare che vi sia la stessa ragione per trascurare $2\sqrt{-0}$ nel numeratore. Inoltre se z ha un valore finito, si sa di certo, che il denominatore è reale, e il numeratore è imaginario: dunque pare, che debba essere lo stesso anche quando $z=0$, ovvero ∞, poichè $2a0\sqrt{-1}$, e $\frac{2a^3}{0}\sqrt{-1}$, sono due tra gl'infiniti valori della variabile imaginaria $2az\sqrt{-1}$, e in conseguenza ancora di $z^2-a^2+2az\sqrt{-1}$. Dall'altra parte s'io contemplo la formola $-t = a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right.$, il raziocinio di

due costanti a, g io le suppongo infinitesime, cioè capaci di infiniti valori relativi; e quindi è in mia potestà lo sceglierne una tale grandezza di là che stia

ad

V. S. Ill.ma mi sembra che bene. Fra le idee del nulla reale, e del nulla imaginario [illegible] confondo perdendomi da una parte, che l'uno e l'altro si debba osservare egualmente, dall'a[ltra] che vi corre un qualche divario. Ricorro pertanto a V. S. Ill.ma sicuro d'ottenere da lei e un b[enigno] perdono per l'ardire, che io mi prendo, e un rischiaramento del mio dubbio...

Anche questo Sig. Avvocato Cassiani Professore di Matematica in questa Università ha mos[so] difficoltà sulla formula $du\sqrt{-1} = \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{z-a\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{z+a\sqrt{-1}}$; integrandola, dic'egli, che devesi [aggiunger]vi la costante, la quale non può supporsi $= 0$ senza petizion di principio. Io la corrispo[ndo]:

$$\frac{\frac{1}{2}a\,dz}{a+z\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{a-z\sqrt{-1}} = \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{\sqrt{-1}\cdot z-a\sqrt{-1}}\ \frac{-\frac{1}{2}a\,dz}{\sqrt{-1}\cdot z+a\sqrt{-1}}$$

: dunque

$$\int \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{a+z\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{a-z\sqrt{-1}} + [illegible] = \int \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{\sqrt{-1}\cdot z-a\sqrt{-1}}\ \frac{-\frac{1}{2}a\,dz}{\sqrt{-1}\cdot z+a\sqrt{-1}} + C$$

: ma nell'equazione $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(a+z\sqrt{-1}) - l(a\ldots\right.$ la costante C si determina $= 0$; dunque anche nell'equazione $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(z-a\sqrt{-1}) - l(z+\ldots\right.$ sarà la medesima costante $C = 0$ senza petizion di principio. La cosa però la può chiarire [illegible]do. Ciononostante essendo questa materia sì delicata, non mi fido di me stesso. Se V. S. Ill.ma si degnerà di rispondermi, io non avrò più timore di paralogismo. Frattanto io mi sentirò onorato, se da Lei sarò incaricato di qualche comando, e colla più con profondo rispetto [mi] protesto [illegible]

Di V. S. Ill.ma [illegible]

Modena 29 Gennajo 1779

Umil.mo e Devot.mo Servit[ore]
Giuseppe Consarel[illegible]

due costanti h, g io le suppongo indeterminate, cioè capaci di infiniti valori relativi; e quindi è in mia libertà lo scegliere una tale grandezza di h [illegible] sia

ad

MODENA

Al Nobile Sig.re Sig.re e Pron. Colmo

Il Signor Conte Giordano Riccati

Treviso

21

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo   43

Ho molto piacere, che la stampa del primo Tomo del suo Corso Matematico si vada accostando al termine, e giacché mi vuol far la grazia di spedirmelo, lo ringrazio vivamente, e mi rallegravo del frutto, che sono per ottenere costì le sue dotte fatiche mediante un Corso pieno di cose, e buone nel tempo stesso.

Al Sig.r Ab. Bossuti hanno risposto il Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli Prof. di Geometria nel Collegio Romano, ed il Sig.r Petronio Maria Caldani; ma per dir il vero io non sono restato pienamente contento delle loro risposte. Nel Tomo XV. del Giornale di Modena è uscita la mia Dissertazione anonima contro il Bossuti, nella quale tra l'altre cose dimostro, che quello stesso argomento, con cui il Cutera ed il Bossuti negano i logaritmi reali dei numeri negativi, serve a provare tutto il contrario.

Quanto prima si pubblicherà nel Giornale di Modena la Dissertazione di mio fratello da Lei veduta intorno i logaritmi dei numeri negativi, ch'è composta da cinque Lettere, alle quali io ne ho aggiunta una sesta. In questa faccio vedere, che la vera equazione esponenziale della logistica è la seguente $l(\frac{g}{y})^{y/h} = x$, nella quale l significa il protonumero, y il logaritmo, x il numero, ed h il logaritmo del numero corrispondente g. Le due costanti h i g io le suppongo infinitiformi, cioè capaci di infiniti valori relativi; e quindi è in mia potestà lo scegliere una tale grandezza di h, che sia

ad

ad y come il numero pari m all'impari n, ovvero
abbiasi $\frac{y}{h} = \frac{m}{n}$. Sarà pertanto $l\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m}{n}}$
$= \pm f \sqrt[n]{\left(\frac{g}{f}\right)^m} = x$, e perciò a qualsivoglia logaritmo
y corrisponderanno due numeri uguali x, uno
positivo, e l'altro negativo, posto il protonumero
$= + f$. La formola esponenziale non mi darà tutti
i numeri negativi, quando si supponga im-
mutabile le due coordinate h, g; ma questa
supposizione è arbitraria, concedendo ad ambe
le coordinate infiniti valori relativi, dai quali
determinatamente valendomi ne risultano...
...ssimo della logistica.

Ella mi conservi la sua buona grazia, ed amicizia
mentre ho il contento di protestarmi

Di V.S. Ill.ma

Treviso 5. Feb.o 1759

Ill.mo Sig.r Pietro Giannini
Segovia

Aff.mo Serv.re ed Amico
Giordano Riccati

Sig.re Sig.re Dione ill.mo

Ill.mo Sig.re Sig.re P.rone Col.mo

[illegible] [illegible] [illegible] che, avanti quanto [illegible] [illegible] [illegible] giornali [illegible] [illegible] in un medesimo [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Dolo, ch' Ella sia rimasta soddisfatta nella [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] questioni [illegible] [illegible] [illegible] quanto [illegible] [illegible] che non [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] analitici. La [illegible] degli [illegible] [illegible], e la [illegible] di mandarne quando ne ha, per render con ogni più pregevole questo Giornale. La prego altresì di onorarmi de' suoi comandi, mentre [illegible] [illegible] [illegible] mi confermo

Ill.ma

Modena 9. Feb. 1779.

Um.o Dev.mo ed Obb.mo Servit.
Domenico Troili.

[illegible] da negligere. Quindi nella ipotesi di $z = \frac{a}{0}$ tro=
vandosi $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$, ne risulta $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = 1$ tras=
[illegible] curando

4 61

si deve negligere. Quindi nella ipotesi di $z = \frac{a}{0}$ tro-

vandosi $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$, ne risulta $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = 1$ tras-

curando

2

12: 5
3

.. 10

MODENA

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron̄e Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia — per — Treviso

[illegible]

Ill.mo Sig.re Sig.re P.ron Col.mo 47

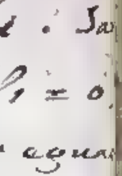
Treviso 12. Febbrajo 1779.

Onorato dai suoi compitissimi, e dottissimi caratteri, incontro con tanto maggior genio l'adempimento dei suoi preziosi comandi, quanto che Ella si dichiara di essere stato discepolo del mio amato Fratello, la cui memoria finchè io viverò mi sarà sempre cara e presente. Nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{a} \cdot l.-a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ la quantità $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ quando $z=0$, è certamente reale, uguagliandosi a -1, e moltiplicandola l'Ab. Vincenzo per $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}} = 1$ grandezza altresì reale, a cagione di ridurla alla forma $\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2\pm o\sqrt{-1}}$, manifestamente si scopre, che nella detta ipotesi di $z=0$ il prodotto $\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2-o\sqrt{-1}}$ di due quantità reali $-1.1=-1$ ha da essere reale, ed uguale a -1. Ma il detto prodotto si trova uguale a -1, quando si trascurano i nulla reali, e gli immaginarj; dunque e gli uni e gli altri si debbono trascurare. Ed infatti avendo il mio Fratello negletto il nulla immaginario nel denominatore, lo dovea parimente trasandare nel numeratore. Che se in questo lo volea ritenere, dovea altresì conservarlo nel denominatore, onde essendo $z=0$, gli si presentasse l'espressione $\frac{-a^2+o\sqrt{-1}}{a^2-o\sqrt{-1}} = -1$. Egli è per altro certissimo, che anche il nulla immaginario si dee negligere. Quindi nella ipotesi di $z=\frac{a^2}{o}$ trovandosi $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{a+o\sqrt{-1}}{a-o\sqrt{-1}}$, ne risulta $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = 1$ trascurando

curando come conviene i nulla immaginarj.

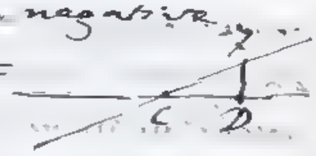
Nella sua bellissima Lettera contenuta nel Tomo XIV. cotesto Giornale Ella stabilisce la formola $u\sqrt{-1} = l\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{-1}}\right)$ esprimente l'arco circolare il pel seno x. La formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.-a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$, quando tangente $z=0$, ed $a=1$, mi dà $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l1$, e la su formola, quando $x=0$, determina $u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l1$. Sa dunque $-l1 = 2l1$, e perciò $3l1 = 0$, e quindi $l1 = 0$, che è verissimo. Le due formole qualora u s'eguagli al quadrante, onde s'abbia $z=\frac{1}{0}$, $x=1$, somminis $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\frac{1}{\sqrt{-1}}$, ossia $-l-1 = 2l\frac{1}{\sqrt{-1}}$: ma $2l\frac{1}{\sqrt{-1}}$ $l-1$; dunque $-l-1 = l-1$, e per consequenza $2l-1$ e poichè $2l-1 = l1$, $l1 = 0$ come sopra. Il perchè rettamente stabilito $\frac{z+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -1$ quando $z=0$, $\frac{z+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$ quando $z=\frac{1}{0}$, che sono i due soli casi, nei quali il numero $-a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$

Egli è infallibile, che si danno due specie di nulla di q tità reale, e di quantità immaginaria. Illustro questa tà con tre esempj. Sintantochè nel circolo del raggio $CE=1$ è $CD=x$ non maggiore di CE, abbiamo la formola $\sqrt{1-x^2} = \pm y$, e ponendo $x=1$, $0=\pm y$. Che se x è maggiore di 1, ci si presenta l'equazione $\sqrt{x^2-1}\,\sqrt{-1} = \pm y$, che quando prende il seguente aspetto $0\sqrt{-1} = \pm y$. Quindi n



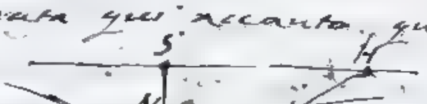
su

punto C si ricongiungono le due specie di nulla delle ordinate reali, ed immaginarie, positive, e negative.



Nel punto C del triangolo, la cui equazione $ax=by$, non si dà salvo che il nulla delle ordinate reali positive, e negative.

Mettete finalmente sotto degli occhi l'equazione $\pm y = \frac{b-x\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ competente al ramo inferiore della concoide di Nicomede, che ha la figura segnata qui accanto, quando è $PS = b$ maggiore di $MS = OH = a$. Se $SN = x$ è maggiore di $SM = a$, l'ordinata $NO = y$ diviene immaginaria, ed in tal ipotesi abbiamo l'equazione $\pm y = \frac{b-x\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{-1}}{x}$. Si faccia $SN = x = SP = b$, e si scoprirà $\pm y = \frac{0\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{-1}}{b}$, cioè a dire l'ordinata $\pm y$ soltanto eguale ad un nulla immaginario.



Nell'atto di scrivere la Risposta alle Riflessioni Analitiche del Sig. Ab. Pasini, ho molto meditato sopra quella stessa difficoltà, che ora viene dottamente proposta dal ch. Sig.r Avvocato Cassiani, a cui la supplico di portare i miei complimenti, e gli attestati d'una pienissima stima. Ecco le ragioni, che mi hanno indotto ad integrare la formola $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\frac{1}{2}adz}{z-a\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}adz}{z+a\sqrt{-1}}\right)$ senza aggiungere costante. Supponendosi che alla tangente $z = 0$ debba

riferirsi

riferirsi l'arco $u = x$, la formula $\frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$ va integrata
senz' aggiunta di costante, onde si abbia $\xi\, u = l.^{o}$ ka
Da questa formola chiaramente apparisce, che sendo
archi minimi eguali alle loro tangenti, l'arco nullo
la tangente nulla risponde. Ora $du = \frac{\frac{1}{2}a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{\frac{1}{2}a\, dz}{a+z\sqrt{-1}}$
$+ \frac{\frac{1}{2}a\, dz}{a-z\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\frac{1}{2}a\, dz}{z-a\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}a\, dz}{z+a\sqrt{-1}}\right)$; dunque la seconda es-
sione usata dal Sig. Ab. Bassuti, e la terza usata da
si deggiono non meno che la prima integrare senza
addizion di costante. L'integrazione della terza es-
sione mi dà $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l.(z-a\sqrt{-1}) - l(z+a\sqrt{-1})\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l(z-\sqrt{-1})\right.$
prendendo 1 per sottotangente, e per protonumero. P
si come il numero $z+\sqrt{-1}$ al numero $z-\sqrt{-1}$, così il pro-
mero 1 al quarto proporzionale $\frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}$, che sarà il
mero relativo al protonumero $=1$, onde ne risulta
$u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{-1+2\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-1-2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)$. Se qu $z =$
integrazione stabilisca $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l{-1}$, quando esser d
d'ancor $u = 0$, dipende ciò dalla natura della logi
la qual esige, che lo stesso logaritmo competa a $\pm$
verità, che si dimostra patentemente mediante la
natura dell'iperbola fra gli assintoti, ed altresì col
dalla equazione esponenziale $l\left(\frac{z}{1}\right)^{\frac{y}{n}} = \pm x$, intor
cui alla vegga la mia Risposta alla pag. 169. e seguen
Osservo di più, che avendo io dimostrato, non dov
nell'integrazione aggiungersi costante, cadrebbe
petizion di principio chi l'aggiungesse, perchè f
una tal aggiunta supponendo quel ch'è in questione
cioè che non fosse $l{-1} = l1$. Resto col maggiore ris

Umil. Divot.mo Serv.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli. Modena.

Giordano Ricc[ati]

[illegible]ero, che il maneggio fatto dal Sig. P. Toaldo colle stampatore Molini [illegible] le Opere di V.S. Illma avrà finalmente la desiderata riuscita. Perchè Ella possa restare pienamente convinta della nostra [illegible] [illegible] lo indichiamo la persona del sud. Molini da cui [illegible] di non potersi più dubitare dello esito. Non omette il Sig. P. Toaldo, che si assicura della onestà del d. Molini, [illegible] per più cautela, di far capitare il suo Manoscritto a [illegible] in mano di qualche accreditata persona, che lo consegni allo Stampatore, perchè (egli) fosse responsabile della custodia del manoscritto, e della esecuzione dell'opera [illegible] il consiglio non può essere migliore, e sarà facile a V.S. Illma di trovare quivi soggetto opportuno a tal uopo. [illegible] acquisterà anche la lettera [illegible] che, come ancora il suo [illegible]. Desidero con premura veggia la luce un'opera così [illegible] e sola, che costò inventare la [illegible] [illegible] in cui si maneggiarono con [illegible] [illegible] onde [illegible] [illegible]

13 Feb. 1779

Umiliss. Devotiss. Obblig. Servitore
Giambattista (?) Nicolai

ad assicurarmi di tutte queste cose per rendermene responsabile, assicurandola che mi starà sommamente a cuore di sortirne a onore.

P.r Arcip.te D. Giuse. Toaldo (Padova)

Dalla equazione esponenziale $r(\frac{3}{4})$ pag. 189. e seguen-
ti Ella vegga la mia Risposta da pag. ... ivi dove
Osservo di più, che avendo io dimostrato, cadrebbe
nell'integrazione aggiungasi costante, cadrebbe
petizion di principio chi l'aggiungesse; perchè f...
una tal aggiunta supponendo quel ch'è in questione
cioè che non fosse $f-1 = fi$. Resto col maggiore ris...
Umil. Divot.mo Serv.
Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contavalli. Modena. Giordano Ricc...

ad assicurarmi di tutte queste cose per
rendermene responsabile, assicurandola
che mi starà sommamente a cuore di
sortirne a onore.

P.r Arcip.te D. Giuse. Toaldo (Padova)

Dalla equazione esponenziale r(34) [illegible] pag. 189. e seguenti
[illegible] alla vegga la mia Risposta [illegible] dimostrato, non dovi
~~Aggiungo~~ Osservo di più, che avendo io dimostrato, cadrebbe
nell' integrazione aggiungasi costante, perché [illegible]
petizion di principio chi l'aggiungesse, perché [illegible]
una tal aggiunta supponendo quel ch'è in questione
cioè che non fosse $t - t = lt$. Resto col maggiore [illegible]
Umil. Divot.^mo^ Serv.
Illmo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli. Modena. Giordano Riccati

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo 55

...gi sono le riflessioni quali mi propone in riguardo alla serie $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$ &c esprimente l'arco ω per la tangente z. Benchè io creda che ne' soli casi di z minore dell'unità, possa l'esposta serie rappresentare l'arco ω; e ne' casi di $z=1$, o di z maggiore di 1, la serie sia erronea: ... non ostante come osserva nella sua stimatissima; fatta $z=\infty$; la serie esposta diverrà divergente, e si discosterà dal giusto in ma... e ... io un termine ... risulterà un infini...

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo 53

Io credo di aver trovato un onesto e capace Stampatore che intraprenderà a suo proprio conto e alle condizioni da VS Ill.ma proposte La Stampa dell' Opera Musicale del S.r Co. Giordano Riccati, però potrà se a Lei piace Spedirmi il Mano Scritto per poterlo esaminare e calculare La Spesa.

Vorrei però ch' Ella si compiacesse di scrivermi una Lettera ostensibile, colla quale mi dicesse che intende L' Autore che L' Edizione sia nitida, corretta, e data in un certo discreto e determinato tempo, però che pensi io ad assicurarmi di tutte queste cose per rendermene responsabile, assicurandola che mi starà sommamente a cuore di sortirne a onore.

p.r Obrig.tes D. Giuse. Toaldo (Padova)

Io non Sò se abbia a VS Ill.ma Scritto che tengo il Secondo Viaggio di Cook al quale è sta[to] aggiunto un 5.to Volume che aspetto in breve ed i 5 Vol. 4.° Legati vagliono 8 Zecchini.

Che è quanto e con tutto L'ossequio ho l'onore di risegnarmi

Di VS Ill.ma

Firenze 6 Febb.ro 17[..]

Dev.mo Obb.mo Ser[vitore]

Giuseppe Molin[i]

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

Leggiere sono le riflessioni quali mi propone in riguardo alla serie $z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}$ &c esprimente l'arco ω, & la tangente z. Benchè io creda, che ne' soli casi di z minore dell'unità, possa la esposta serie rappresentare l'arco ω; e ne' casi di $z=1$, o di z maggiore di 1, la serie sia erronea: ciò non ostante come osserva nella sua stimatissima, fatta $z=\infty$; la serie esposta diverrà divergente, e si discosterà dal giusto in maniera, che fermandosi in un termine impari ne risulterà un infinito positivo; e trattenendosi in un termine pari si troverà un infinito negativo. Ora siccome è il Chi: Sig. Conte $\frac{1}{0}=\infty$; dunque o z si faccia $=\infty$, o z si faccia eguale a $\frac{1}{0}$ sempre la serie $z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}$ &c si dovrà trasmutare in una serie divergente tale, che i termini impari diano un infinito positivo, e i termini pari un infinito negativo: ma la serie $\frac{1}{0}-\frac{1}{0}+\frac{1}{0}$ &c non solo non è divergente; ma in oltre dona ne' termini impari un infinito positivo, i termini pari non danno un infinito negativo come dovrebbero, ma bensì zero. Vittorio Stancari al [illegible] di Grandi è stato il primo a credere doversi l'infinito esprimere con $\frac{a}{0}$. Questa espressione è buona fino a tanto, che il zero sia relativo e non assoluto: ma se per zero si prenda il niente assoluto come si è costumato fare da' più sublimi, e moderni calcolatori, si introdurranno nell'Analisi delle questioni, quali riguardano la certezza di questa sublime Scienza. L'Analisi o la Scienza del computo altro non riguarda che le quantità; onde il determinare quale debba essere il quoto, che nasce dalla divisione d'una quantità per altra quantità appartiene all'Analisi: ma il determinare quale debba essere il quoto, che nasce dalla divisione d'una quantità per nulla [illegible] non riguarda l'Analisi. A mio credere adunque ciò che non è quantità non riguarda in conto veruno l'Analisi; se pure per zero [illegible] l'espressione $\frac{1}{0}$ non appartiene [illegible] si esprime una quantità quanto uno voglia piccola rispetto all'unità.

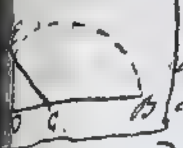
Convengo che se riuscisse di sommare la frazione $\frac{p-\frac{1}{6}p^3+\frac{1}{30}p^5 \&c}{1-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{24}p^4 \&c}$ si troverebbe il numeratore infinito in riguardo al denominatore; nego però che questa frazione possa essere eguale a $\frac{1}{0}$. Si divida il numeratore, e il denominatore della frazione data per lo stesso numeratore, e la frazione diverrà eguale a $\frac{1}{(1-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{24}p^4 \&c) : p-\frac{1}{6}p^3+\frac{1}{30}p^5 \&c}$. In questa frazione il denominatore non può essere zero assoluto; ma bensì relativo in riguardo all'unità. Di fatti nel denominatore: $1-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{24}p^4$ &c rappresenta il dividendo; e $p-\frac{1}{6}p^3+\frac{1}{30}p^5$ &c rappresenta il divisore: ma il dividendo è al divisore come il quoto all'unità: dunque concedendomisi che $1-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{24}p^4$ sia infinitesimo rispetto a $p-\frac{1}{6}p^3+\frac{1}{30}p^5$ &c il quoto anche che nasce dalla divisione della prima quantità per la seconda sarà infinitesimo rispetto all'unità: dunque la tangente del quadrante quale si dimostra eguale alla data frazione non potrà mai eguagliare $\frac{1}{0}$ come si pretende.

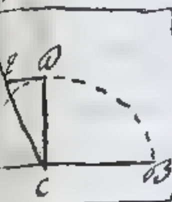
Esame la formola $u=\frac{\sqrt{-1}}{n}\,l\,\frac{-az-a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$: non intendo in primo luogo perchè faccia la tangente $z=\frac{a^2}{n}$: quando supposta la stessa formola, nella [illegible] in data 13 Nov: trovo la tangente $z=\frac{a}{n}$. Se per n si rappresenta un nu-

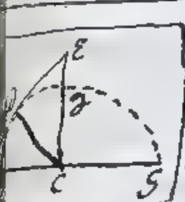
mero eguale, o maggiore, o minore dell' unità; essendo z una linea raggio del circolo: sarà una tangente qualunque z rispetto al raggio a espressa ottimamente per $\frac{a}{n}$. Similmente se n rappresenta un numero eguale, o maggiore, o minore dell' unità a il raggio: rappresenterà $\frac{a^2}{n}$ una superficie qualunque rispetto al quadrato del raggio: onde non so prendere come una linea quale deve essere la tangente z si esprimere per una superficie. In secondo luogo supposta la tangente $z=\frac{a^2}{n}$, fatta $n=1$ sarà $z=a^2$. In questa ipotesi di $z=a^2$ domando z rappresenti la tangente del semiquadrante, o la tangente di un arco maggiore del semiquadrante; ma non doppio del semiquadrante, o la tangente di un arco minore del semiquadrante. Rappresenta z la tangente del semiquadrante: contro la Geometria si dimostra essere la tangente del semiquadrante eguale al quadrato del raggio. Se poi z rappresenta la tangente d'un arco maggiore del semiquadrante ma non doppio del semiquadrante, o la tangente di un arco minore nella formola $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-az-a^2\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ sostituendo a^2 valore di z, u arco maggiore o minore del semiquadrante $=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-a^2-a^2\sqrt{-1}}{a-a\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, a\cdot\frac{-1-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, {-a\sqrt{-1}}$ il che ripugna alle sue proprie idee, secondo le quali un arco di $45°$ si trova eguale ad $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, {-a\sqrt{-1}}$. Si supponga però $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-\frac{a^3}{n}-a^2\sqrt{-1}}{\frac{a^2}{n}-a\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-\frac{a^2}{n}-a\sqrt{-1}}{\frac{a}{n}-\sqrt{-1}}=$ $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-\frac{a^2}{n}-\frac{na\sqrt{-1}}{n}}{\frac{a}{n}-\frac{n\sqrt{-1}}{n}}$. In questa formola convengo io e deve di necessità convenire ancora lei. Si supponga ora $n=0$ e vedo come la frazione $\frac{-\frac{a^2}{n}-\frac{na\sqrt{-1}}{n}}{\frac{a}{n}-\frac{n\sqrt{-1}}{n}}$ possa divenire eguale a $-a$. Se si pone $\frac{\frac{a^2}{n}-\frac{na\sqrt{-1}}{n}}{\frac{a}{n}-\frac{n\sqrt{-1}}{n}}=-a$ sarà $-\frac{a^2}{n}-\frac{na\sqrt{-1}}{n}=-\frac{a^2}{n}+\frac{na\sqrt{-1}}{n}$; quale equazione non sussiste se i termini $\pm\frac{na\sqrt{-1}}{n}$ non si facciano ... ma questo non puole ammettere il Chiar. Sig.r Conte; mentre essendo $n=0$ $-\frac{na}{n}=-a$ onde per lo stesso motivo $\frac{na\sqrt{-1}}{n}=a\sqrt{-1}$, $=-a\sqrt{-1}$. Ad evidenza dunque mi par dimostrato secondo le medesime idee non potere essere supposta $n=0$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{-\frac{a^2}{n}-a\sqrt{-1}}{\frac{a}{n}-\sqrt{-1}}=$ $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, {-a}$. Non occorre qui dire essendo $n=0$ ridursi le equazioni $-\frac{a^2}{n}-\frac{na\sqrt{-1}}{n}=-\frac{a^2}{n}+\frac{na\sqrt{-1}}{n}$ e a $-\frac{a^2}{0}-a\sqrt{-1}=-\frac{a^2}{0}+a\sqrt{-1}$, onde essendo $-\frac{a^2}{0}$ infinito, poter sussistere le equazioni negligentando i termini $\pm a\sqrt{-1}$ finiti: mentre dirò sempre non potersi nelle quantità $-\frac{a^2}{0}-a\sqrt{-1}$, $-\frac{a^2}{0}+a\sqrt{-1}$ negligentare i termini $\pm a\sqrt{-1}$ finiti, divenendo con ciò quantità da immaginarie che sono, reali. Io concedo essere $a\pm 0\sqrt{-1}$ ... non perchè $\pm 0\sqrt{-1}$ sia quantità minima rispetto ad a; ma perchè $\pm 0\sqrt{-1}$ altro non è che zero. Che se $\pm 0\sqrt{-1}$ fosse quantità minima rispetto ad a allora avrebbe luogo l'analogia che forma; mentre

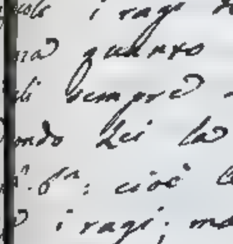
Giuseppe Molin...

si potrebbe dire: se la quantità minima $\pm o\sqrt{-1}$ si negligenta rispetto ad a, $\pm o\sqrt{-1}$ si potrà negligentare rispetto a $z = \frac{a^2}{o}$: ma in questo caso essendo $\pm o\sqrt{-1}$ quantità minima rispetto ad a ed immaginaria, non concederei mai, che fosse $\pm o\sqrt{-1} = a$; mentre con negligentare il termine $\pm o\sqrt{-1}$ la quantità dall'essere immaginaria diviene reale. Lo stesso si dica allorche si concepisca una quantità infinita rispetto alla quale quantità non posso concedere, che si possa negligentare una quantità finita, ed immaginaria $\pm a\sqrt{-1}$. Supposta la somiglianza de triangoli EDC, CAF ottimamente si determina la tangente $AF = \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$. In caso che l'arco AE si eguagli al quadrante i triangoli svaniscono, onde non si puole più concepire analogia tra lati de triangoli non esistenti; in darno adunque si tenta determinare la tangente del quadrante dalla formola $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$; qual formola è vera in supposizione dell'esistenza de triangoli simili, e per conseguenza dell'analogia de lati. E' certo però, che nella formola $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$ quando $x=a$ si ha $\frac{a^2}{o}$. Similmente essendo AD quadrante a motivo de triangoli simili sarà $ED : DC = CA : AF$; onde fatto $ED = o$ il raggio $= a$ si trova di novo $\frac{a^2}{o}$. Di più essendo l'arco $DF = 90°$, DA tangente dell'arco $DB = x$, sarà DE tangente dell'arco DF di complimento $= \frac{a^2}{x}$; essendo per i triangoli simili ACD, DCE, $AD = x : DC = a = a : DE$. Coincida il lato DC sopra BC, sarà $DA = x = o$; onde la formola $\frac{a^2}{x}$ si trasmuterà in $\frac{a^2}{o}$. Questi tre diversi metodi sembra, che diano nello stesso modo la tangente del quadrante espressa per $\frac{a^2}{o}$: ma siccome la verità di questi metodi dipende dall'esistenza de triangoli simili; se questi svaniscono; le formole quali si dedurranno saranno illusorie, erronee. Di fatti sia la tangente del quadrante $= \frac{a^2}{o}$. Si moltiplichi numeratore e denominatore per -1 sarà $\frac{a^2}{o} = \frac{-a^2}{-o}$: ma $-o = +o$ dunque $\frac{a^2}{o} = \frac{-a^2}{o}$ dunque $\frac{a^2}{o} + \frac{a^2}{o} = o$. Similmente si moltiplichi il numeratore e denominatore della frazione $\frac{a^2}{o}$ per $\pm\sqrt{-1}$; sarà $\frac{\pm a^2\sqrt{-1}}{\pm o\sqrt{-1}} = \frac{a^2}{o}$: ma $\pm o\sqrt{-1} = o$: dunque $\frac{\pm a^2\sqrt{-1}}{o} = \frac{a^2}{o}$: dunque $\pm a^2\sqrt{-1} = a^2$. Inoltre le tangenti di due archi simili sono per la Geometria come i raggi; onde due archi simili di due circoli i raggi de quali siano a, b, ed i quali archi differiscano di una differenza uno, sole minima dal quadrante, avranno le tangenti, quali sempre saranno come $a : b$. Divengano questi archi quadranti: sarà secondo Lei la tangente di uno alla tangente dell'altro come $\frac{a^2}{o} : \frac{b^2}{o} = a^2 : b^2$: cioè le tangenti di archi simili, quali sono i quadranti, non come i raggi; ma come i quadrati de raggi. Vediamo però se per altro metodo egualmente certo, che i tre esposti, si possa determinare la tangente del quadrante diversamente da $\frac{a^2}{o}$. Siano i due archi An, nE eguali, ed $AG = 90°$, $Enm = 90°$. Si conducano i raggi AC, CG; e per i punti A, E si tirino le tangenti, quali vadano ad incontrare le secanti CnD, CmB, CGF. Dalla costruzione è chiaro essere DF parallela a BC, ed essere i triangoli CDF, DCB simili. Sia la tangente $AD = DE = b$, $BA = FE = x$ sarà $DB = b + x = DF$. Chiamando il raggio a sarà $CB = CF = \sqrt{a^2+x^2}$. Ciò posto per la somiglianza de triangoli CDF, DCB, essendo DB:





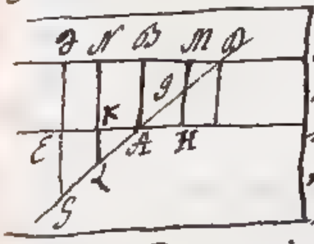




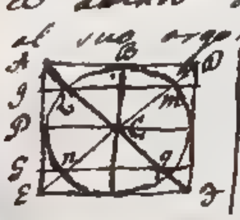
che

BC = CF : DF sarà $b+x : \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+x^2} : b+x$; onde $b^2+2bx+x^2 = a^2+x^2$;
però $a^2-b^2 = 2bx$; $x = \frac{a^2-b^2}{2b}$. Essendo BA = x tangente dell'arco Am il
cui compimento al quadrante è la somma degli archi eguali An, nE
ed essendo CA media proporzionale tra le tangenti BA ed AO, sarà
$x : a = a : AO = \frac{a^2}{x}$: ma di sopra $x = \frac{a^2-b^2}{2b}$, dunque $\frac{a^2}{x} = \frac{2a^2b}{a^2-b^2} = AO$;
cioè eguale alla tangente della somma de' due archi eguali An, nE.
Quanto più l'arco Am si diminuisce, tanto più li archi An, nE
costano a 45°, così che divenuto zero l'arco Am l'arco An = nE = 45°
ma divenuto l'arco Am = 0, sarà la tangente x = 0, e divenendo An =
nE = 45°, sarà la tangente b = AB = BE = al raggio = a ed AO tang.
della somma degli archi An, nE, tangente del quadrante; onde si
avrà $\frac{a^2}{0} = \frac{2a^3}{0} = AO$. Evidentemente dunque costa, che la formula
$\frac{a^2}{x} = \frac{2a^2b}{a^2-b^2} = AO$ la quale è certa supposta l'esistenza de' triangoli
simili BDC, CDF; BAC, CAO diviene illusoria, ed erronea supposto che
i triangoli svaniscano; mentre in primo luogo si deduce $\frac{a^2}{0} = \frac{2a^3}{0}$
che è falso: in secondo luogo si deduce $\frac{2a^3}{0}$ eguale alla tangente
del quadrante il che di novo non può sussistere, non convenendo
con $\frac{a^2}{0}$, quale $\frac{a^2}{0}$ per i tre metodi di sopra si trova eguale alla tangente
del quadrante.

È certo essere $\frac{\pm n}{\pm n} = 1$ perchè $\pm n$ rappresenti una quantità. Supposta la



costruzione mi dica si archi il secondo luogo geometrico
la cui ascisse $\pm n$ e le ordinate $\frac{\pm n}{\pm n}$. Qui domando un
intenda per $\pm n$: se intende qualunque quantità, ed anche
ro, già suppone ciò, che è in questione tra di noi;
tra la questione è, se per $\frac{\pm n}{\pm n}$ si possa rappresentare
nità in caso di n=0: Onde non si puole la semiordinata
costante = 1 rappresentare per $\frac{\pm n}{\pm n}$ in caso di n=0, se non si suppone
deciso essere $\frac{\pm n}{\pm n} = 1$, ancorchè sia n=0. Se poi dice il secondo luogo
geometrico ha per semiordinata l'unità: ma l'unità si puole rappresentare
per $\frac{\pm n}{\pm n}$ dunque sarà la semiordinata AB = 1 = $\frac{\pm n}{\pm n}$ essendo n=0: rispondo
rò potersi l'unità rappresentare per $\frac{\pm n}{\pm n}$ essendo ±n quantità, e
costantemente essere $\frac{\pm n}{\pm n} = 1$ fatto n=0. Per quanto uno diminuisca
ascissa positiva AH = n essendo sempre la semiordinata HM = 1; e per
quanto uno diminuisca, o cresca l'ascissa negativa AK = −n
anche la semiordinata KN = 1: la legge di continuità esigge che
nel punto A principio delle ascisse, e dove n=0, sia la semiordinata
ta AB = 1; non però esigge la legge di continuità, che se ne punti
+ si concede potersi rappresentare l'unità per $\frac{\pm n}{\pm n}$, anche in A, dove
si debba rappresentare l'unità per $\frac{\pm n}{\pm n}$. A tutto ciò aggiungo una rifless
ne fatta sul poscritto della mia in data 10 Decembre, e
la avendo ancora sua saggia risposta. Questa riflessione è
al suo argomento. Per quanto decresca la linea PS è sempre la



generata dalla linea Sn eguale al circolo corrispondente
onde la fascia divisa per il circolo generato dalla linea
nq = 1. Così per quanto decresca la linea PS di posizione
contraria a PS la fascia generata da SL eguale al

Giuseppe Molin

pondente circolo; onde divisa questa per il corrispondente circolo gene=
rato da Lm, sarà eguale all'unità: dunque per la legge di continuità
ancora nel punto P la fascia, quale degenera in periferia di circo=
lo, dovrà eguagliare il circolo corrispondente, quale degenera in un pun=
to; e per conseguenza la periferia, divisa per il punto, eguale all'=
unità. La risposta al presente argomento è, che la legge di conti=
nuità non ricerca, che nella ragione nella quale stanno le quan=
tità debbano stare i termini delle istesse quantità: onde se la
ragione delle fascie ai circoli corrispondenti è quella di 1:1 la
ragione della periferia nel punto P, quale periferia è termine
delle fascie, non è di necessità, che sia al punto C termine di tutti
i circoli come 1:1. Lo stesso dico al suo argomento: se la ragione
delle linee AH, SH; AK, KZ è quella di 1:1, non è di necessità, che la
ragione del punto A, termine delle linee, sia allo stesso termine
punto istesso A come 1:1

Quando sintanto che a dy, dx si assegnino due minimi relativi valori dover ri=
sultare per l'analogia $dy:dx = y : \frac{ydx}{dy} = \frac{ny^n+ydy}{a} = nx + \frac{ydy}{a}$ = alla sotto=
secante: considerando però il perimetro della parabola accurato, e non
risultante da lineole infinitamente piccole. Concedo ancora accos=
tarsi la sottosecante $nx+\frac{ydy}{a}$ alla sottangente nx, secondo che dy
va diminuendo onde divenire la sottosecante sottangente fatta $dy=0$
Nego però, che in questa ipotesi di $dy=0$ debba allora aversi l'ana=
logia $dy:dx = y:nx$; mentre torno a ripetere, io non conosco proporzione
non tra lati di triangoli simili, e realmente esistenti: ora siccome
fatta $dy=0$ anche $dx=0$ quindi nella parabola il triangolo tra i lati
dy, dx risultante svanisce, e non più esiste, onde non posso più conce=
pire analogia, e lati omologi, e per conseguenza non posso più concepire
la proporzione $dy:dx = y:nx$. Il metodo delle flussioni; considerando il
perimetro della parabola accurato; ben ci fa conoscere non esprimer=
si $nx+\frac{ydy}{a}$ la sottangente; ma bensì come saggiamente osserva
la sottosecante. Di più ci fa conoscere aversi allora la coincidenza
della sottosecante con la sottotangente quando dy sia $=0$. Dunque per
l'analogia $dy:dx = y : \frac{ydx}{dy} = nx + \frac{ydy}{a}$ il metodo delle flussioni ci
determina una linea quale vix differt dalla sottangente, e nel
tempo istesso ci mostra quando si abbia la coincidenza con la
tangente; non si dimostrerà però mai, che dal metodo delle flussio=
ni debba seguire l'analogia $dy:dx = y:nx$. Saggiamente la ragione
di $dy:dx$ si chiama da Newton ultima. L'ultima ragione delle
quantità finite, è la ragione delle loro infinitesime, e non dei zeri.
L'ultima ragione delle quantità finite risulta dalla ragione delli
ultimi decrementi, quali sono eguali ai primi incrementi: ma l'ulti=
mi decrementi come i primi incrementi non sono zeri; ma bensì infi=
nitesime. Così presa una quantità, e divisa in metà di metà
all'infinito ne risulta una serie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ec. nella quale l'ul=
timo termine, rappresenta ottimamente l'ultimo decremento, quale non
è già zero assoluto ma infinitesima di uno.

Quando nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} L\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$ per determinare l'arco di 90° si
introduca in luogo di z una espressione, quale non equivalga alla
tangente del quadrante, mi si deve concedere, che si dovrà avere

che

una formola quale non potrà mai esprimere l'arco $u=90°$: m
per le cose dette di sopra $\sqrt{\frac{1}{0}}$ non esprime la tangente del quadr
dunque ponendo in luogo di z, $\frac{1}{0}$ la formola non potrà mai esprim
il quadrante. Sia però $\frac{1}{0}$ la tangente del quadrante sarà
$\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = \frac{-\frac{1}{0}-\frac{0\sqrt{-1}}{0}}{\frac{1}{0}-\frac{0\sqrt{-1}}{0}}$. In questa formola $-\frac{0\sqrt{-1}}{0}$ è quantità m
ma, o zero assoluto: se è quantità minima non concederò mai
possa negligentarsi; mentre con ciò la quantità dall'essere
maginaria diviene reale: se poi è zero assoluto, sarà adunque
la formola ridotta a $\frac{-\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = -\frac{0}{0}$: ma se $-\frac{0\sqrt{-1}}{0}$ è zero, p
stesso motivo sarà ancora $-\frac{0}{0}=0$. Per uniformarmi più che sia p
file alle sue idee essendo $0\sqrt{-1}=0$ la formola $\frac{-\frac{1}{0}-\frac{0\sqrt{-1}}{0}}{\frac{1}{0}-\frac{0\sqrt{-1}}{0}}$ si p
trasmutare in $\frac{-\frac{1}{0}-\frac{0}{0}}{\frac{1}{0}-\frac{0}{0}}$; onde concedendo $-\frac{0}{0}=-1$ si ridurrà
formola a $\frac{-\frac{1}{0}-1}{\frac{1}{0}-1} = \frac{-\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = -\frac{0}{0} = -1$. Con questo operare però diamo
altri inconvenienti; mentre fatto $-\frac{0\sqrt{-1}}{0} = -\frac{0}{0}$: se si concede $-\frac{0}{0}$
bisognerà concedere essere $-\frac{0}{0} = -1\cdot\frac{0}{0} = -1\cdot 1$; onde per lo stesso
tivo, sarà ancora $-\frac{0\sqrt{-1}}{0} = -\frac{0}{0}\cdot\sqrt{-1} = -1\cdot 1\cdot\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$: onde $-\frac{0}{0}$ po
essere reale, ed immaginario nel tempo stesso. E' chiaro adunque
che se si concede $-\frac{0}{0}=-1$ bisognerà negare essere $-\frac{0\sqrt{-1}}{0} = -\frac{0}{0}$
conseguenza bisognerà dire non essere $0\sqrt{-1}=0$. Questi inconv
si altistantemente mi persuadono, che l'Analisi ci abbandoni
che con le quantità calcoliamo dei zeri; e da questo ne viene
le formole analitiche prendano valori diversi, ed anche contrad
secondo il diverso maneggio de' zeri. Da tutto ciò viene, che se n
formola $\frac{\sqrt{-1}}{2}\ell\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$ in luogo di z si sostituisca il suo valore $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ del
sempre $-\frac{z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{-1}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{-1}} = \frac{-x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ purchè si calcolino del
quantità. Che se $\sqrt{1-x^2}$ si supponga zero, allora sarà $\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{-1}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{-1}}$
$\frac{-\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}{\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}$. onde le ragioni ora addotte dimostrano non poters
formola $\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{-1}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{-1}}$ fare uguale a $\frac{-x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ in caso di
nel qual caso $\frac{-x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ diviene eguale a -1, ed $x=1$.

Le due formole $\frac{\sqrt{-1}}{2}\ell\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$, $\sqrt{-1}\,\ell\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ convengono esattissim
te tra di loro; dico però, che mai si dimostrerà ad evidenza
con la prima, ne con la seconda formola essere $u=90° = \frac{\sqrt{-1}}{2}\ell -1$
integrationi dell'una, ed altra formola si introduce un modo di
re quale mi si rende sospetto. Così integrando si trova $u=\sqrt{-1}\,\ell$
e facendo $x=0$ per l'aggiunta della costante si trova $u=\sqrt{-1}(\ell$
$-\ell\sqrt{-1})$; e senza ulteriore esame si pone eguale a $\sqrt{-1}\,\ell\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$
un tal modo di calcolare non può sussistere, e secondo la ragion
acciò $\ell x+\sqrt{x^2-1} - \ell\sqrt{-1}$ sia $=$ a $\ell\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ è necessario che x, $x+\sqrt{x^2}$

Giuseppe Molin

...ino termini di una istessa progressione geometrica: ma consideriamo $x+\sqrt{x^2-1}$, come termini di una progressione, $\sqrt{-1}$ non puole essere termine di questa progressione; dunque ∞. La minore di questo argomento così la dimostro. In una progressione geometrica nella quale il primo termine sia 1 ed altro dato qualunque termine, deve essere eguale ad un altro qualunque elevato ad un dato grado di potenza: Dunque se 1, $x+\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{-1}$ sono termini di una istessa progressione sarà necessario, che $x+\sqrt{x^2-1}$ sia eguale a $(\sqrt{-1})^z$: ma prendendo per z qualunque numero intero, o rotto positivo o negativo mai si verificherà essere $x+\sqrt{x^2-1}=(\sqrt{-1})^z$ dunque $x+\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{-1}$ non sono termini d'una istessa progressione. Essendo $x=1$ i termini 1, $x+\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{-1}$ si trasformano in 1, 1, $\sqrt{-1}$ onde concedendosi, che questi tre termini possano essere termini di una istessa progressione geometrica si potrà dire dover essere almeno in questo caso $l(x+\sqrt{x^2-1})$ $l\sqrt{-1} = l\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}} = l-\sqrt{-1}$: ma $x=1$ è seno di 90°; dunque $u=90°=$ $\sqrt{-1}\,l-\sqrt{-1}$ onde $p=180°=\sqrt{-1}\,l-1$. A questa eccezione così rispondo. La formola $\sqrt{-1}\left(l(x+\sqrt{x^2-1})-l\sqrt{-1}\right)$ rappresenta l'integrale d'un dato qualunque arco, il di cui incremento però deve essere $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$: ma supponendo $x=1$ l'incremento del quadrante non è espresso da $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ dunque nè pure l'integrale debbe essere espresso da $\sqrt{-1}\left(l(x+\sqrt{x^2-1})-l\sqrt{-1}\right)$ l'incremento del quadrante supposto $x=1$ non sia espresso da ciò è chiaro. La formola $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ dimostra essere l'incremento dell'arco eguale all'incremento del seno, diviso per il coseno: dunque $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ esprime l'incremento dell'arco in supposizione, che si dia l'incremento del seno: ma fatto l'arco=90° non si può dare incremento nel seno dunque $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ non esprime l'incremento del quadrante; e per conseguenza il quadrante non si puole esprimere per $\sqrt{-1}\left(l(x+\sqrt{x^2-1})-l\sqrt{-1}\right)$ in supposizione di $x=1$; ma bensì supponendo la differenza tra x ed 1 picciola quanto uno vole, sarà in questa supposizione $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ incremento di un arco infinitamente prossimo quanto uno vole al quadrante; e per conseguenza $\sqrt{-1}\left(l(x+\sqrt{x^2-1})-l\sqrt{-1}\right)$ eguale ad un arco infinitamente prossimo al quadrante, e senza errore eguale al quadrante istesso. Benchè adunque $\sqrt{-1}\left(l(x+\sqrt{x^2-1})-l\sqrt{-1}\right)$ fatto $x=1$ si trovi eguale a $\sqrt{-1}\,l-\sqrt{-1}$; da ciò non viene, che il quadrante debba esserlo eguale a $\sqrt{-1}\,l-\sqrt{-1}$. I raziocinii fatti su la formola $l(x+\sqrt{x^2-1})$ e $l\sqrt{-1}$ si possono facilmente applicare alla formola

$$l\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$$

...ngo essere le due equazioni $z=\frac{-1}{(4x^2-2)\sqrt{-1}-4x\sqrt{1-x^2}}+\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\sqrt{-1}+$ ...; $z=\frac{-4x^3+3x-4x^2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{-8x^3+6x-8x^2\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{x^2-1}}$

...e l'apparenza senza fare ulteriore esame, mi ha potuto in=...a crederle immaginarie; onde con facile giro di calcolo la ...si riduce a $z=2x\sqrt{1-x^2}$ e la seconda a $z=3x-4x^3$.

...mi è ancora riuscito avere il giornale di Modena, quale leggerò ...sommo mio piacere, e non mancherò per ubidire a suoi commandi

che

trasmetterà il mio giudizio. Si degni fra tanto il Chiᵐᵒ mio Sig.ʳ Can.ᶜᵒ ponderare queste riflessioni, ed assicurandolo, che sarà eguale in me il piacere di convenire nel suo sentimento, o che Lei nel mio, con[illegible] al solito pieno di stima, e rispetto mi dico

Di V.S. Illma Roma 13 Febraro 1779

Devotmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli.

Giuseppe Molin

Sig. Arcip. Ditme Rmo 65

Trevigo 19. Feb.° 1779.

Sig. Ab. Sig. Sig. Ditme Colmo 63

Il Sig. Prof. Ab. Toaldo mi ha fatto il favore di trovare uno Stampatore in Firenze, che intraprenderà a suo conto l'impressione della mia Opera di Contrappunto. Consigliandomi egli di far capitare il mio Manoscritto in mano di qualche Persona autorevole, acciocchè lo consegni allo Stampatore Sig. Giuseppe Molinari, n' abbia la custodia, mi è caduto tosto in pensiero il celebre Sig. Ab. Leonardo Ximenes, il quale potrà ancora farmi la grazia d'insinuare allo Stampatore di provedersi di un Correttore intendente di Musica, che presieda all'esatta esecuzione degli esempj musicali, e senza prendersi alcun arbitrio, abbia l'unica mira, che la stampa riesca conforme all'originale. Dico questo, perchè sopra de' Bassi li scrivo spesso dei numeri diversi da quelli, che si usano comunemente, nè vorrei che mi accadesse quello, ch'è successo al Sig. Tartini, che un Maestro ha cangiati nei Bassi i numeri, credendoli malamente scritti dai Copisti. Io le spedisco adunque il Manoscritto coll'occasione [illegible] che

rasmetterà il mio giudizio. Si degni fra tanto il Chi: mio Sig.r Conte ponderare queste riflessioni, ed assicurandolo, che sarà eguale ... il piacere di convenire nel suo sentimento, e che Lei nel mio ... al solito pieno di stima, e rispetto mi dica

D.V.S. Ill.ma Roma 13 Febraro 1779

64 ... Sig. Ab. ...

che il Sig. Ettore Trenti ... Venezia, supplicandola di inviarla al Sig.r Ab. Ximenes ... Benchè io non abbia mai con lui carteggiato; mi prendo questo coraggio fondato sulla nota sua gentilezza, nè mancherò di fargli con lettera i miei complimenti, e di protestargli quella pienissima stima che da lunghissimo tempo nutro per un Soggetto che fa tanto onore alla Italia ...

Se mai valessi in servirla, mi onori dei suoi preziosi comandi, premendomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale ho il vantaggio di confermarmi col maggiore rispetto

Di Lei Sig.r Ab. Ill.mo e Rev.mo

Trevisa 16 Febbrajo 1779

Ill.mo Sig.r Ab. Matteo Luigi Canonici S. Benetto Venezia

Divot.mo Obbl.mo Serv.
Giordano Riccati

Sig. Arcip. Doviana Rovinio

Treviso 19. Feb.° 1779.

trasmetterai il mio giudizio. Si degni fra tanto il Chi: mio Sig:r Con[...]
ponderare queste riflessioni, ed assicurandolo, che sarà eguale [...]
il piacere di convenire nel suo sentimento, o che Lei nel mio conv[...]
al solito pieno di stima, e rispetto mi dico

di V.S. Ill.ma Roma 13 Febraro 1779

Treviso 19. Feb.o 1779.

[Acc]ettando il consiglio dello stimat.mo Sig. Prof. Toaldo ho spedito il Manoscritto al Sig. Ab. Canonici, acciocchè lo faccia tenere in Firenze al Sig.r Ab. Leonardo Ximenes, persona dotta, ed autorevole, che sendo Matematico del Granduca può tenere in soggezione lo Stampatore, quando ve ne fosse bisogno. Attenderò la risposta del Sig. Ab. Canonici, e poscia scriverò al Sig. Ab. Ximenes, pregandolo di graziarmi di una qualche sopraintendenza alla edizione della mia Opera, e di suggerire allo Stampatore di provedersi di un Compositore, e di un Correttore intendenti di Musica, che attendano alla retta esecuzione degli esempj musicali. La lettera ostensibile, che ricerca il Sig. Molini, mostra la sua onestà, e sincera intenzione, che la stampa riesca nitida, corretta, e sollecita.

[Tr]ovarici nuovamente il Sig. Prof. Toaldo dal distinto favore, che mi ha impartito, facendo sì, che il mio Trattato passi alla pubblica luce, onde le fatiche di molti anni non riescano inutili. Sono poi sicuro dalla loro premura di farmi degli associati, ed io crederei, che non si dovesse durare molta fatica a trovarne cinquanta. Sono col più cordiale rispetto Di Lei Sig. Arcip. Rivmo

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Sig. Arcip. Nicolai. Padova.

... Reservo. seg.to

Rn: 20 Febr.o 79

T. Ben.e

Dev.mo Obb. Ser.e V.o
Matteo Luigi Canonici

trasme
pondera
il piac
al soc

AVS.c

651

69

o, i ne=
infinita
2+1 = i=
finito, e
ente
pure
ancora
$\frac{x}{n})^n - 1 = 0$
questi
si la
Rima=
olo
$)^n - 1 = 0,$
a che
. In
finiti
quazio
nte
due
ora
blema
nium
blema
rmola
imma=
cori=

un
tan=
sa a=n
ll arco
di 15°

$3x - x^3 = y$
cubo
Ao=
resenta
$\sqrt{3}$,
oblema
ire
nile riz=
sia la n=
$(1+\frac{x}{n})^n -$
i; dun=
imma=

... rispettoso. sig.r C.
... 20 Febb.o 79
T. Beni.

Dev.mo Obb. Ser.e V.o
Matteo Luigi Canonici

trasme
gondera
il piac
al so

DVS. c

adq
ssed,
ured
sti =
mpro
iulo

Ho' s
pedi
deb
obbo
race
he ar
Fire
n ho
ivij. m
i' pa
da p
cam
D
n: a

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

69

…adeguatamente risponderò alla dotta sua lettera in data 22 Gennaro, è ne-
…ssario rifletterò, che nel metodo di Eulero si suppone i quantità infinita-
…mente piccola, ma non già immaginaria. Da questa supposizione $L(1+i) = i$
…$L(1+i) = L(1+i)^n = ni$; e generalmente $L(1+i)^n = ni$. Si supponga n infinito, e
…sempre si avrà $L(1+i)^n = ni$; ma siccome i è quantità infinitamente
…piccola, ma reale, ancora ni sarà quantità reale. Si faccia pure
… sarà x quantità reale, e in conseguenza sarà reale ancora
… … l'equazione $(1+\frac{x}{n})^n - 1 = 0$

Nob: Sig.r Co: Sig.r Pron Col.mo

67

Ho sospeso l'esecuz:ne de' suoi comandi, e differita la
Spediz:ne del suo Involto a Firenze per dirle; P.o
[se] debbo affidare al Proc.o di Firenze il Ms.; 2.o se
[Poss]o francarlo fino colà; 3.o se meglio sarebbe
raccomandarlo ad un'altro Legr.o mio Amico anzi
[c]he al P. Ximenez, perchè questi forse nō si troverà
[a] Firenze, ma o alle Maremme di Siena, o altrove.
[No]n ho voluto arbitrare in alcuna cosa pel desiderio
[v]ivis.mo di ben servirla, e nō avventurare un monum.to
[p]iù prezioso. Ella disponga di me liberam.te, e mi
[ten]ga per genio, e per debito pieno di devotis.mo at-
taccamento

Di Lei Nob. Sig. Co:

[Ve]n: 20 Febr.o 79

T. Bent.

Dev.mo Obb. Ser.re V.o
Matteo Luigi Canonici

trasme
pondera
il piac
al so

P.V.S. c

6 46

adj
quali
mare
olti =
mpre
ula

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo.

...r adequatamente risponderò alla dotta sua lettera in data 11 Gennaro, è ne=
...ssario riflettere, che nel metodo di Eulero si suppone i quantità infinita=
...mente piccola, ma non già immaginaria. Da questa supposizione $l.(1+i) = i$=
$l.(1+i) = l.(1+i)^2 = 2i$; e generalmente $l.(1+i)^n = ni$. Si supponga n infinito, e
...mpre si avrà $l.(1+i)^n = ni$; ma siccome i è quantità infinitamente
...iccola, ma reale, ancora ni sarà quantità reale. Si faccia pure
... sarà x quantità reale, e in conseguenza sarà reale ancora
... l'equazione $(1+\frac{x}{n})^n - 1 = 0$

... questi
... la
... Rima=
...colo
...$)^n - 1 = 0$,
...à che
... In
...finiti
...uazio
...nte
... due
...orrà
...blema
... niun
...blema
...ormola
... imma=
...coris=

...un
... fan=
...tta a=
...ll'arco
... di 15°
...eque $3x - x^3 = y$
...one cuba
...o $l o=$
...ipresenta
..., $\sqrt{3}$,
...oblema
...ire
...imile rifle=
...tta la n=
... $(1+\frac{x}{n})^n$
...ri; dun=
... imma=

Al Nob: Sig:re Sig: Pron Col.mo
Il Sig: Conte Giordano Ricati

Treviso

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo.

...r adequatamente risponderò alla Dotta sua lettera in data 11 Gennaro, è ne-
cessario riflettere, che nel metodo di Eulero si suppone i quantità infinita-
mente piccola, ma non già immaginaria. Da questa supposizione $l(1+i) = i$
$l(1+i) = l(1+i)^1 = 1i$; e generalmente $l(1+i)^n = ni$. Si supponga n infinita, e
impropriamente si avrà $l(1+i)^n = ni$; ma siccome i è quantità infinitamente
piccola, ma reale, ancora ni sarà quantità reale. Si faccia pure
$ni = y$, e sarà y quantità reale; ed in conseguenza sarà reale ancora
... Nella supposizione dunque di $\frac{y}{n}$ reale l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$
conduce, e si dimostra essere infiniti i valori di $\frac{y}{n}$: ma siccome questi
infiniti valori di $\frac{y}{n}$ sono zero, e tutti li altri immaginarii; quindi la
condizione che $\frac{y}{n}$ sia reale esclude tutti i valori immaginarii. Rima-
ne dunque per uniformarsi alla condizione di $\frac{y}{n}$ reale il solo
zero da potersi sostituire in luogo di $\frac{y}{n}$ nell'equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$,
colla quale sostituzione il logaritmo di uno altro non sarà che
zero. Lo stesso dico dell'equazione $z^n - 1^n = 0$; fatta $z = (1+\frac{y}{n})$. In
questa equazione $z^n - 1^n = 0$, considerata nella sua estensione, infiniti
sono i valori di z; onde come saggiamente osserva risultando l'equazio-
ne $z^n - 1^n = 0$ dalla moltiplicazione di tutte le sue radici similmente
eguali a zero, ed essendo ciascun fattore trinomiale il prodotto di due
radici; quindi qualunque fattore trinomiale della formola $z^n - 1^n = 0$ dovrà
essere ancora zero. Dico però, che costando dalle condizioni del problema
essere $(1+\frac{y}{n})$ quantità reale, sarà ancora z quantità reale, onde niun
altro valore di z potrà sodisfare a questa condizione del problema
se non un valore reale di z: ma dei fattori trinomiali della formola
$z^n - 1^n = 0$ il valore reale di z è uno, e gli altri valori tutti sono imma-
ginarii: dunque la sola unità sostituita in luogo di z puole corri-
spondere alle condizioni del problema.

Per maggiormente rischiarare questa dottrina; suppongo il raggio d'un
circolo $= 1$ onde sia la tangente di $45° = 1$. Ciò posto si cerchi la tan-
gente di 15°, terza parte di 45°. Insegna la Geometria, che data u-
na tangente qualunque x; supponendo il raggio $= 1$; la tangente dell'arco tri-
plo si trova $= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. Chiamando dunque x la tangente di 15°,
sarà $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = 1$, tangente di 45° triplo di 15°. Si avrà dunque $3x - x^3 = 1 -$
$3x^2$; onde $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$. I valori di x in questa equazione sono
tre cioè -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$. Si raziocinarebbe male, se si dicesse l'e-
quazione $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ ci dà tre diversi valori di x; ma x rappresenta
la tangente di 15°, dunque la tangente di 15° potrà essere -1, $2+\sqrt{3}$,
$2-\sqrt{3}$. Dico raziocinarebbe male; mentre dalle condizioni del problema
si conosce, che alla condizione di tangente di 15°, niun valore dei tre
-1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ può sodisfare, se non l'unico $2-\sqrt{3}$. Una simile rifle-
ssione si faccia su l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$ e si dica stabilita la
formola $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$, y è logaritmo di uno: ma dalla formola $(1+\frac{y}{n})^n -$
$1^n = 0$ i valori di y sono zero, gli altri infiniti tutti immaginarii; dun-
que il logaritmo di uno sarà eguale a zero, ed agli altri infiniti ed imma-

... Bonatto Venezia

Giordano Riccati

ginarii valori di y. Questo argomento è consimile all'esposto di sopra onde come sopra diremo, che benchè infiniti siano i valori di y; ciò non ostante dalle condizioni del problema essendo $\frac{x}{n}$ quantità reale, niuno de' infiniti valori di y può soddisfare a questa condizione, se non che … onde il logaritmo di uno, altro non puole essere che zero.

Dalla equazione $z^2 - 2z\,Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} + Cos:\frac{2\lambda\pi}{n}^2 = -Sen:\frac{2\lambda\pi}{n}^2$ estraendo le rad[ici] deduce ottimamente $z - Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} = \pm Sen\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, onde $z = Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen:\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$ … Essendo partiti dalla formola $z^n - 1^n = 0$; se in luogo di z^n si sostitui[sce] il suo valore $(Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n})^n$ dovrà verificarsi l'equazione $z^n - 1^n$ … Che l'equazione si verifichi è certo, mentre lo stesso Eulero ha di[mos]trato nel Cap: 8: Int: in An: Infi: essere generalmente $(Cos: z \pm Sen: z\sqrt{-1})^n =$ $Cos: nz \pm Sen: nz\sqrt{-1}$. Essendo adunque $z = Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen:\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$, sarà $z^n =$ $(Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n})^n = Cos:\frac{n2\lambda\pi}{n} \pm Sen:\frac{n2\lambda\pi}{n} = Cos: 2\lambda\pi \pm Sen\, 2\lambda\pi$ … ma $Cos: 2\lambda\pi = 1$, $Sen: 2\lambda\pi = 0$ dunque sarà $z^n = 1$; onde realmente … verifica essere $z^n - 1^n = 0$ ponendo in luogo di λ qualunque numero della serie 0, 1, 2, 3, 4, &c. Ponendo in luogo di z il suo valore $1 + \frac{x}{n}$ si … $\frac{x}{n} = Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} - 1 \pm Sen\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$. Vole lo stimatissimo Sig. Conte, che … sia negligentare $Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} - 1$ quantità relativamente nulla rispetto … $Sen\frac{2\lambda\pi}{n}$; dunque mi deve concedere potersi senza errore suppor[re] $Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} - 1 \pm Sen:\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n} = \pm Sen:\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$: dunque ancora mi deve conc[edere] che una quantità finita, ed immaginaria si possa fare eguale sen[za] errore alla stessa quantità finita ed immaginaria, più o meno u[na] infinitesima reale. Torno ora a ripetere, che nella sua stima[tissima] ma in data 16: Ott: mi concede dover essere la frazione $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ … immaginaria; benchè z sia infinita relativa rispetto ad a. Prego il Chia: Sig. Conte a volere ponderare la seguente ragione. La fr[azio]ne $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ mi si concede immaginaria supposta z infinita risp[etto] ad a; ma $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}} = \frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$ dunque sarà immaginaria ancora … frazione $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$: ma siccome senza errore si puole fare $Cos:\frac{2\lambda\pi}{n}$ … $\pm Sen\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n} = \pm Sen\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$; essendo $Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} - 1$ infinitesimo rispetto al … dunque ancora senza errore si potrà fare il numeratore $z\sqrt{-1} + a$ … $z\sqrt{-1}$, ed il denominatore $z\sqrt{-1} - a = z\sqrt{-1}$; essendo a infinitesima [ris]petto a z. La frazione dunque $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$ senza errore si può … eguale a $\frac{z\sqrt{-1}}{z\sqrt{-1}} = 1$. Dunque la frazione $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$, senza err[ore] in caso di z infinito rispetto ad a; diviene reale: ma $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$ … $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ dunque ancora $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ sarà reale; quando già mi si … concessa immaginaria.

A questa ragione altra ne aggiungo quale a mio credere dimostra … dentemente non potersi negligentare nell'equazione $\frac{x}{n} = Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} -$ … $Sen:\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$ la quantità $Cos:\frac{2\lambda\pi}{n} - 1$; onde venga $\frac{x}{n} = \pm Sen:\frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$ … niti sono i valori di $\frac{x}{n}$; ma qualunque di questi valori sostitu[ito] …

...la formola $(1+\frac{y}{n})^n$ deve dare l'unità positiva, e reale, acciò si verifichi l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ dalla quale siamo partiti. Se in luogo di $\frac{y}{n}$ si sostituisca il suo valore $Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ esprimendo $\underline{\lambda}$ qualunque numero della serie 0, 1, 2, 3, 4 &c. sarà $1+\frac{y}{n} = Cos \frac{2\lambda p}{n} \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$; onde $(1+\frac{y}{n})^n = (Cos: \frac{2\lambda p}{n} \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n = 1$ come di sopra si è osservato. In questo caso adunque esattamente si verifica $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Se poi ... errore si puole fare $\frac{y}{n} = \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ mi si deve concedere, che dal sostituire $\pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ in luogo di $\frac{y}{n}$ nella formola $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ non debba seguire assurdo alcuno; ma bensì debba verificarsi l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$: ... in luogo di $\underline{\lambda}$ sostituendo qualunque termine della serie 0, 1, 2, 3, &c. l'equazione $(1 \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n-1=0$ non solo non si verifica; ma bensì è impossibile. Di fatti supponendosi $Sen: \frac{2\lambda p}{n} = \frac{2\lambda p}{n}$ il binomio $(1 \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})$ elevato alla potenza infinita $\underline{n}$ ci deve necessariamente dare una quantità immaginaria, fuori del caso di $\lambda=0$; dunque l'equazione $(1 \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n-1=0$ è impossibile, onde è evidente, non potersi fare senza errore $\frac{y}{n} = \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$. Che se è falso essere $\frac{y}{n} = \pm Sen \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, sarà anche evidentemente falso essere $y = 2 = \pm 2\lambda\sqrt{-1}$

In terzo luogo si prenda di novo a considerare la formola $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Mi si deve concedere essere generalmente il fattore trinomiale $(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n}) \cdot Cos: \frac{2\lambda p}{n}+1$; onde in luogo di λ ponendo zero sarà il primo fattore trinomiale un perfetto quadrato $= (1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n}) \cdot Cos: \frac{2 \cdot 0 \cdot p}{n}+1 = (1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})+1$; ... $Cos: \frac{2 \cdot 0 \cdot p}{n} = 1$. Il primo fattore adunque della formola $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ ... la mente dello stesso Eulero sarà $(1+\frac{y}{n})-1$. Similmente l'ultimo fattore trinomiale della formola medesima si avrà, allorchè $\underline{\lambda}$ giunga eguale ad $\underline{n}$; onde l'ultimo fattore trinomiale sarà il perfetto quadrato $(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n}) \cdot Cos: \frac{2np}{n}+1 = (1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n}) \cdot Cos: 2p+1 = (1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})+1$; essendo $Cos: 2p = 1$. L'ultimo fattore adunque sarà similmente $(1+\frac{y}{n})-1$; radice del perfetto quadrato. Prima però, che $\underline{\lambda}$ ... ad eguagliare $\underline{n}$ è necessario, che nei fattori trinomiali anteriori all'ultimo cominci $\underline{\lambda}$ ad avere qualche ragione sensibile rispetto ad $\underline{n}$; molti adunque saranno i fattori trinomiali nei quali $\frac{2\lambda p}{n}$ non rappresenterà un archetto infinitesimo, ma bensì un arco finito. Evidentemente dunque costa, che nel fattore trinomiale $(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n}) \cdot Cos: \frac{2\lambda p}{n}+1$, non si può generalmente supporre $Cos: \frac{2\lambda p}{n}$ *quam proxime* eguale all'uno, non essendo in tutti i fattori trinomiali generalmente, $\frac{2\lambda p}{n}$ archetto infinitesimo. Tutto ciò mi deve necessariamente concedere la ... gentilissima Sig.r Conte. Si prenda ora la sua equazione $\frac{y}{n} = Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, su della quale così discorro. Generalmente $\frac{2\lambda p}{n}$ non rappresenta un archetto infinitesimo, dunque generalmente $Cos: \frac{2\lambda p}{n}$ non è *quam proxime* eguale all'unità: dunque generalmente $Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1$ non è quantità infinitamente piccola da negligentarsi rispetto a $Sen: \frac{2\lambda p}{n}$ come pretende il Sig.r Conte. Similmente $\frac{2\lambda p}{n}$ non è generalmente archetto infinitamente piccolo, dunque nè pure generalmente sarà $\pm Sen: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n} = \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$

Anetto Venezia

Giordano Riccati

ginarii valori di y. Questo argomento è consimile all'esposto di sopra onde come sopra diremo, che benchè infiniti siano i valori di y; ciò ostante dalle condizioni del problema essendo $\frac{y}{n}$ quantità reale, niuno de infiniti valori di y può sodisfare a questa condizione, se non che onde il Logaritmo di uno, altro non puole essere che zero.

Dalla equazione $z^2 - 2z\,Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} + \overline{Cos: \frac{2\lambda\pi}{n}}^2 = - \overline{Sen: \frac{2\lambda\pi}{n}}^2$ estraendo la rad. deduce ottimamente $z - Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} = \pm Sen \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, onde $z = Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen: \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$. Essendo partiti dalla formola $z^n - 1^n = 0$; se in luogo di z^n si sostituisce il suo valore $(cos: \frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n})^n$ dovrà verificarsi l'equazione $z^n - 1^n = 0$. Che l'equazione si verifichi è certo, mentre lo stesso Eulero ha dimostrato nel Cap: 8: Int: in An: Infi: essere generalmente $(cos: z \pm Sen: z\sqrt{-1})^n = Cos: nz \pm Sen: nz\sqrt{-1}$. Essendo dunque $z = Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen: \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$, sarà $z^n = (cos: \frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sen \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n})^n = Cos: \frac{n2\lambda\pi}{n} \pm Sen: \frac{n2\lambda\pi}{n} = Cos: 2\lambda\pi \pm Sen\, 2\lambda\pi$; ma $Cos: 2\lambda\pi = 1$, $Sen: 2\lambda\pi = 0$ dunque sarà $z^n = 1$; onde realmente si verifica essere $z^n - 1^n = 0$ ponendo in luogo di λ qualunque numero della serie 0, 1, 2, 3, 4, &c. Ponendo in luogo di z il suo valore $1 + \frac{y}{n}$ si ha $\frac{y}{n} = Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1 \pm Sen \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$. Vole lo stimatissimo Sig.r Conte, che si sa negligentare $Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1$ quantità relativamente nulla rispetto a $Sen \frac{2\lambda\pi}{n}$; dunque mi deve concedere potersi senza errore supporre $Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1 \pm Sen: \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n} = \pm Sen: \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$; dunque ancora mi deve concedere che una quantità finita, ed immaginaria si possa fare eguale senza errore alla stessa quantità finita ed immaginaria, più o meno una infinitesima reale. Torno ora a ripetere, che nella sua stimatissima in data 16: Otto: mi concede dover essere la frazione $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ immaginaria; benchè z sia infinita relativa rispetto ad a. Prego il Chia: Sig.r Conte a volere ponderare la seguente ragione. La frazione $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ mi si concede immaginaria supposta z infinita rispetto ad a; ma $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}} = \frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$ dunque sarà immaginaria ancora la frazione $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$: ma siccome senza errore si puole fare $Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1 \pm Sen \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n} = \pm Sen \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$; essendo $Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1$ infinitesimo rispetto a $Sen \frac{2\lambda\pi}{n}$; dunque ancora senza errore si potrà fare il numeratore $z\sqrt{-1} + a = z\sqrt{-1}$, ed il denominatore $z\sqrt{-1} - a = z\sqrt{-1}$; essendo a infinitesima rispetto a z. La frazione dunque $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$ senza errore si può fare eguale a $\frac{z\sqrt{-1}}{z\sqrt{-1}} = 1$. Dunque la frazione $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a}$, senza errore in caso di z infinito rispetto ad a; diviene reale: ma $\frac{z\sqrt{-1} + a}{z\sqrt{-1} - a} = \frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ dunque ancora $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ sarà reale; quando già mi si è concessa immaginaria.

A questa ragione altra ne aggiungo quale a mio credere dimostra evidentemente non potersi negligentare nell'equazione $\frac{y}{n} = Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1 \pm Sen: \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$ la quantità $Cos: \frac{2\lambda\pi}{n} - 1$; onde venga $\frac{y}{n} = \pm Sen: \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n}$. Infiniti sono i valori di $\frac{y}{n}$; ma qualunque di questi valori sostituito

...formola $(1+\frac{y}{n})^n$ deve dare l'unità positiva, e reale, acciò si verifichi l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ dalla quale siamo partiti. Se in luogo di $\frac{y}{n}$ si sostituisca il suo valore Cos: $\frac{2\lambda p}{n}-1 \pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ esprimendo λ qualunque numero della serie 0, 1, 2, 3, 4 &c sarà $1+\frac{y}{n}=$ Cos: $\frac{2\lambda p}{n} \pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$; onde $(1+\frac{y}{n})^n = ($Cos: $\frac{2\lambda p}{n} \pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n = 1$ come di sopra si è osservato. In questo caso adunque esattamente si verifica $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Se poi per errore si vuole fare $\frac{y}{n} = \pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ mi si deve concedere, che dal sostituire $\pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ in luogo di $\frac{y}{n}$ nella formola $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ non debba seguire assurdo alcuno; ma bensì debba verificarsi l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$: ma in luogo di λ sostituendo qualunque termine della serie 0, 1, 2, 3, &c l'equazione $(1\pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n-1=0$ non solo non si verifica, ma bensì è impossibile. Di fatti supponendosi Sen: $\frac{2\lambda p}{n}=\frac{2\lambda p}{n}$ il binomio $(1\pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})$ elevato alla potenza infinita n ci deve necessariamente dare una quantità immaginaria, fuori del caso di $\lambda=0$; dunque l'equazione $(1\pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n-1=0$ è impossibile, onde è evidente, non potersi fare senza errore $\frac{y}{n}=\pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$. Che se è falso essere $\frac{y}{n}=\pm$ Sen $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, sarà anche evidentemente falso essere $y = l1 = \pm 2\lambda\sqrt{-1}$

In terzo luogo si prenda di novo a considerare la formola $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Mi si deve concedere essere generalmente il fattore trinomiale $(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})$. Cos: $\frac{2\lambda p}{n}+1$; onde in luogo di λ ponendo zero sarà il primo fattore trinomiale un perfetto quadrato $=(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})\cdot$ Cos: $\frac{2\cdot 0\cdot p}{n}+1=(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})+1$; essendo Cos: $\frac{2\cdot 0\cdot p}{n}=1$. Il primo fattore adunque della formola $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ secondo la mente dello stesso Eulero sarà $(1+\frac{y}{n})-1$. Similmente l'ultimo fattore trinomiale della formola medesima si avrà, allorchè λ giunga eguale ad n; onde l'ultimo fattore trinomiale sarà il perfetto quadrato $(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})\cdot$ Cos: $\frac{2np}{n}+1=(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})\cdot$ Cos: $2p+1=(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})+1$; essendo Cos: $2p=1$. L'ultimo fattore adunque sarà similmente $(1+\frac{y}{n})-1$; radice del perfetto quadrato. Prima però, che λ arrivi ad eguagliare n è necessario, che nei fattori trinomiali anteriori all'ultimo cominci λ ad avere qualche ragione sensibile rispetto ad n; molti adunque saranno i fattori trinomiali nei quali $\frac{2\lambda p}{n}$ non rappresenterà un archetto infinitesimo; ma bensì un arco finito. Evidentemente adunque costa, che nel fattore trinomiale $(1+\frac{y}{n})^2-2(1+\frac{y}{n})\cdot$ Cos: $\frac{2\lambda p}{n}+1$, non si può generalmente supporre Cos: $\frac{2\lambda p}{n}$ quam proxime eguale all'uno, non essendo in tutti i fattori trinomiali generalmente, $\frac{2\lambda p}{n}$ archetto infinitesimo. Tutto ciò mi deve necessariamente concedere il chiarissimo Sig.r Conte. Si prenda ora la sua equazione $\frac{y}{n}=$ Cos: $\frac{2\lambda p}{n}-1\pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$; su della quale così discorro. Generalmente $\frac{2\lambda p}{n}$ non rappresenta un archetto infinitesimo, dunque generalmente Cos: $\frac{2\lambda p}{n}$ non è quam proxime eguale all'unità: dunque generalmente Cos: $\frac{2\lambda p}{n}-1$ non è quantità infinitamente piccola da negligentarsi rispetto a Sen: $\frac{2\lambda p}{n}$ come pretende il Sig.r Conte. Similmente $\frac{2\lambda p}{n}$ non è generalmente archetto infinitamente piccolo, dunque nè pure generalmente sarà $\pm$ Sen: $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}=\pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$

...Benetto Venezia

Giordano Riccati

Queste ragioni addotte in riguardo al metodo di Eulero sembrano d
decisive onde con piacere. Attendendone sua dotta risposta, mi
nore rassegnarmi con tutti li attestati di vera stima, e rispetto.

di V.S. Ill.ma Roma 20. Feb.o 1779

Umilmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli.

Ill.mo Sig: Sig: Prõn Col.mo

Sig.r Ab. Sig.re e Prone Riv.mo 33

[Q]uando non se le presenti qualche pronta sicura occasione, affidi il MS.o al Proc.o di Firenze, francandolo sino colà. Le riflessioni ch'Ella fa intorno all'incertezza, che l'Ab. Ximenes si ritrovi in Firenze, mi determinano a prescegliere l'erudito suo Amico, il quale certamente sarà Persona autorevole atta a tenere in soggezione lo Stampatore, se ciò richiederanno le circostanze. La prego a rendermi noto il suo nome, e cognome, essendo necessario, che il Sig: Ab. Toaldo sappia la Persona, da cui il Sig.r Molini ha da ricevere il MS.o.
La ringrazio infinitamente per l'interesse, che gentilmente si prende nella mia premura, e pieno di debito, e di rispetto mi confermo

Di Lei Sig: Ab. Riv.mo

Treviso 22. Feb.o 1779

Ill.mo Sig. Ab. Matteo Luigi Canonici
Benetto Venezia

Divot. Obbl.mo Serv.e V.o
Giordano Riccati

Queste ragioni addotte in riguardo al metodo di Eulero sembrano d
decisive onde con piacere attendendone sua dotta risposta, mi
onore rassegnarmi con tutti gli attestati di vera stima, e rispetto.

Di V.S. Ill.ma Roma 20. Feb.o 1779

74

Illmo Sig: Sig: Prone Colmo

l'ultima

quale

ma

e, e in

me

u è

inalibile

$= 2 \ell -\sqrt{-1}$

,

ulto è

$\overline{\sqrt{-1}}^2$.

che sia

ovvero

na del

$\ell -1$ si

e di

more

$\ell \pm\sqrt{-1}$,

cioè,

se

lità

è quantità

per

queste

Queste ragioni addotte in riguardo al metodo di Eulero sembrano a
decisive onde con piacere attendendone sua dotta risposta, mi o
noro rassegnarmi con tutti li attestati di vera stima, e rispetto.

di V.S. Ill.ma   Roma 20. Feb.o 1779

Illmo Sig: Sig: Pron Colmo

V. S. Illma mi taccierà di negligente per non aver risposto, prima d'ora, all'ultima di Lei pregiatissima, ma non attribuisca alla mia volontà il ritardo, il quale in gran parte è provenuto dal solito gagliardo raffreddore, cui quì annoma[i] sofferto da che sono in Roma, e quì rimango impedito ad applicare, e in parte da un poco di studio fatto sopra alcune cose analitiche che non mi lasciavano d'interromperle. Ora ho potuto ripigliare il dottissimo suo foglio, e ponderandolo mi è parso d'incontrarvi quelle stesse difficoltà, che incontrai nelle riflessioni analitiche del Sr Cesputi. Due sono esse principalmente: Una, che la quantità $2l\frac{1}{\sqrt{-1}} = 2l-\sqrt{-1}$ sia $= l-1$: l'altra, che sia $l\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}} = l-1$. Io per me son di parere, (e forse m'inganno) che non sia mai $2l\pm\sqrt{-1} = l-1$, perche il primo membro è immaginario, e il secondo reale, e che per conseguenza non sia $2l\pm\sqrt{-1} = l\overline{\pm\sqrt{-1}}^2$. Altro è, a parer mio, che -1 possa considerarsi prodotto da $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$, altro è, che sia $2l\sqrt{-1} = l-1 = l\overline{\sqrt{-1}}^2$. E in generale altro è, che possa essere $\overline{\sqrt{-1}}^m = \pm 1$, ovvero $= \pm\sqrt{-1}$, secondochè m è pari, o dispari (a che tutta si riduce la dottrina del Sr Cesputi) altro è che $m\,l\sqrt{-1} = l\overline{\sqrt{-1}}^m$. Per sostenere $2l\pm\sqrt{-1} = l-1$ si adduce la pretesa proporzionalità di $1 : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : -1$; ma due cose mi occorre di notare, le quali sembrami, che meritino qualche riflesso, e che io mi do l'onore di sottoporre alla sua correzione. L'una è, che $l-1 = 2l-\sqrt{1}$, ma non $= 2l\pm\sqrt{-1}$, perche $\frac{1}{2}l-a = l-\sqrt{a}$, e non $= l\sqrt{-a}$. L'altra è un vero paradosso, cioè, che quantunque quattro, o più qtà siano proporzionali, non può assolutamente inferirsi in generale, che i loro logaritmi siano in ragione aritmetica. Aggiungerei la proposizione conversa, che quantunque quattro, o più quantità abbiano i loro logaritmi in ragione aritmetica, non possa dedursi, che esse quantità siano in proporzione geometrica, e che se i logaritmi siano uguali, debbano per questo essere uguali le qtà, delle quali si considerano i logaritmi: ma di queste

Que' ultime cose in altro tempo, e parlerò ora solamente della prima
Addurrò una qualche ragione del mio sentimento, e perciò fare, benchè
io batta una lunga strada, tuttavia perchè somministra un calcolo facile
e semplicissimo, non ho voluto abbandonarla, e tentarne altra, che
mi avrebbe portato a calcoli troppo difficili per me, e troppo laboriosi.
Siano tre, quattro, o più q.tà geometricamente proporzionali intanto dicesi, che
i loro logaritmi sono in ragione aritmetica, in quanto supponesi, che possa
una q.tà costante, dalle potestà della quale derivino prodotti, che siano
alle q.tà pred.e geometricamente proporzionali. Così essendo $a:b::c:d$, dicesi
essere $La:Lb::Lc:Ld$ aritmeticamente, perchè si suppone, che una
costante $= \beta$, ch'altro non è, che la base logaritmica possa alzarsi a tal
per esempio x, onde risulti $\beta^x = a$, e parimenti, che la stessa β alza
alla potestà y dia $\beta^y = b$, alzata alla potestà m, dia $\beta^m = c$, e
alla potestà h dia $\beta^h = d$. Ciò essendo siccome in tal caso $x = L\beta^x$
$y = L\beta^y$, $m = L\beta^m$, $h = L\beta^h$, riescono verissime tutte le proprietà
logaritmi. In fatti la scambievole proporzionalità si conosce nella segu
$\beta^x : \beta^y :: \beta^m : \beta^h$, e però $\beta^{x+h} = \beta^{y+m}$, ed $x+h = y+m$, cioè
somma de' logaritmi de' due di mezzo uguagliasi alla somma de' logaritmi degli
Ma inoltre $x+h = L\beta^{x+h}$, ed $x = L\beta^x$, $h = L\beta^h$, dunque $L\beta^x + L\beta^h$
$= L\beta^{x+h}$, cioè la somma dei logaritmi di due numeri $=$ al logaritmo
prodotto di essi numeri}
Avvertito inoltre, che $L\sqrt{-1}$ è sempre quantità immaginaria. Osservazione per
la riconoscono tutti gli Analisti, i calcolo lo dimostra trovandosi

$$L\sqrt{-1} = \frac{4\sqrt{-1}}{1\cdot 3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5\cdot 7} + \frac{4\sqrt{-1}}{9\cdot 11} + \frac{4\sqrt{-1}}{13\cdot 15}\ \&c.\}$$

Premesse queste cose vengo a considerare l'addotta proporzionalità di $1:\sqrt{-1}::\sqrt{-1}:$

dalla quale vuol inferirsi, che sia aritmeticamente $L1 : L\sqrt{-1} :: L\sqrt{-1} : L-1 = 2L\sqrt{-1}$
Perchè ciò vaglia dee poter trovarsi la base $= B$, dalle potestà della quale deriverino i termini, che compongono la proporzionalità geometrica sovraespressa.
Or qui nascono diversi casi da considerarsi. O si vede, che la base sia reale cogli esponenti reali, o che la base sia reale cogli esponenti immaginarj; o che la base sia immaginaria cogli esponenti reali, o sia la base immaginaria cogli esponenti immaginarj. Trascorrerò più brevemente, che, entro tutti questi casi per vedere, se può sussistere la proporzione aritmetica, che vuol dedursi dalla geometrica addotta. Il primo caso viene a proposito, perchè essendo il secondo termine della proporz. geometrica $= \sqrt{-1}$ bisogna, che l'esponente della base B sia tale, che esso $= L\sqrt{-1}$, ma $L\sqrt{-1}$ è immaginario, e l'esponente della base si suppone reale; dunque un numero reale sarebbe uguale ad un numero immaginario, locchè è assurdo
Il secondo caso è più complicato, ma resta facile a trattarsi riflettere, che qui quantità immaginaria viene espressa dalla formola $a+m\sqrt{-1}$ intendendo, che siano a, m quantità reali. Supponiamo adunque, che alla sopraposta proporzionalità geometrica $1:\sqrt{-1}::\sqrt{-1}:-1$ equivaglia l'altra di $B^{a+m\sqrt{-1}} : B^{c+v\sqrt{-1}} :: B^{c+v\sqrt{-1}} : B^{2c+2v\sqrt{-1}-a-m\sqrt{-1}}$, di modochè sia $B^{a+m\sqrt{-1}} = 1$, $B^{c+v\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$ {sarà dunque $a+m\sqrt{-1} = L1$, $c+v\sqrt{-1} = L\sqrt{-1}$} Si ha dalla prima equazione $a = L1 - m\sqrt{-1}$, e dalla seconda $c = L\sqrt{-1} - v\sqrt{-1}$, ovvero $\frac{a}{m} = \frac{1}{m}L1 - \sqrt{-1}$, $\frac{c}{v} = \frac{1}{v}L\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$; dunque sia, o non sia tanto $L1$, quanto $\frac{1}{v}L\sqrt{-1}$ reale, siccome $\sqrt{-1}$, ed $L\sqrt{-1}$ sono immaginarie, sarà sempre $\frac{1}{m}L1 - L\sqrt{-1}$, ed $\frac{1}{v}L\sqrt{-1}-\sqrt{-1}$ qtà immaginaria: ma per ipotesi a, m, c, v sono reali, dunque una qtà immaginaria si uguaglierebbe ad una reale. Che se fosse $a, c = 0$ allora la proporzione geometrica si cangerebbe nella seguente $B^{m\sqrt{-1}} : B^{v\sqrt{-1}} :: B^{v\sqrt{-1}} : B^{2v\sqrt{-1}-m\sqrt{-1}}$, onde essendo $B^{m\sqrt{-1}} = 1$, ovvero

> 6

$-\beta^{m\sqrt{-1}} = -1$, ed $\beta^{2r\sqrt{-1}-m\sqrt{-1}} = -1$, sarebbe $m\sqrt{-1} = L{-1}$, ed $2r\sqrt{-1}-m\sqrt{-1} = L{-1}$ dunque $m\sqrt{-1} = 2r\sqrt{-1}-m\sqrt{-1}$, equazione, che dà $m = r$; ma quando $m = r$ [...] i termini della proporzionalità geometrica si fanno eguali, dunque il p[rimo] termine $\beta^{m\sqrt{-1}}$ sarebbe $= 1$, e dovrebbe essere $=$ al secondo $= \sqrt{-1}$, lo che è impossibile.

Il terzo caso importa, che la base sia immaginaria coll'esponente reale. Se potesse essere avremmo allora $\overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,m} : \overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,r} :: \overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,r} : \overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,2r-m}$; [...] $\overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,m} = 1$, $\overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,r} = \sqrt{-1}$, e però $m = L1$, $r = L\sqrt{-1}$; ma r è quan[tità] reale, ed $L\sqrt{-1}$ immaginaria, dunque sarebbe il reale $=$ all'immaginario.

Il quarto, ed ultimo caso immaginabile è quando la base sia immaginaria ed immaginario l'esponente, onde la proporzionalità geometrica prenda la seguente forma $\overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,a+m\sqrt{-1}} : \overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,c+r\sqrt{-1}} :: \overline{\beta\sqrt{-1}}^{\,c+r\sqrt{-1}} : \beta^{2c+2r\sqrt{-1}-a-m\sqrt{-1}}$, che corrisponda alla proposta analogia di $1 : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : -1$. Questo caso si scioglie come il secondo, perchè avremo $a+m\sqrt{-1} = L1$, $c+r\sqrt{-1} = L\sqrt{-1}$, e però $\frac{a}{m} = [...]$ ed $\frac{c}{r} = \frac{1}{r}L\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$, equazioni, che danno quantità reali $=$ a quantità immaginarie. Lo stesso assurdo, che succede nel pred.[o] secondo caso, segue nel quarto, se facesse[ro] [...]

Benchè adunque si accordi la proporzionalità geometrica di $1 : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : -1$, non segue, che i logaritmi di d.[e] quantità siano in proporzione aritmetica. Ciò essendo non sussisterà l'equazione di $2L\pm\sqrt{-1} = L{-1}$; e venendo all'equaz.[e] di Sua Illma sarà vero, che $2L\frac{1}{\sqrt{-1}} = L\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}}$, ma non sarà $2L\frac{1}{\sqrt{-1}} = L{-1} = L\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}}$; d[...] appunto non potersi prendere $L\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}} = L\frac{-\infty}{\infty} = L{-1}$. Ma non mi rima[ne] più luogo da scrivere essendo al fine dell'ultima pagina del foglio. Ella m[i] favorirà il venerat.mo di Lei sentimento. Spero quindi, come ho cominciato di trarre, la teoria del calcolo de' logaritmi immaginarj. Mi continui [la] pregiatma sua grazia, e mi onori de' suoi comandi, che io sono, e sarò [...] con tutto l'ossequio

Di V.S. Ill.ma

Roma 24 Feb.[o] 1779

Umo, ed Obbmo [...]

Pelamio M.[e] [...]

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Includo la nota degli errori corsi ne' due ultimi miei Opuscoli, acciocchè, se giudica ciò opportuno, ne faccia stampare le correzioni alla fine del Tomo XVI. Gli errori da me scoperti alla pag. 176. della Risposta non sono facilmente riconoscibili ancora da chi ha molta perizia di calcolo.

Ho una curiosa Dissertazione del fu Co. Jacopo mio Padre, nella quale rende in qualche maniera piano il problema della misurazione degli angoli. Gliela spedirò quanto prima, affinchè l'inserisca nel Giornale insieme colle mie Annotazioni. Spero che sarà ricevuta con aggradimento. Colla stessa occasione le invierò due mie Dissertazioni, che trattano, l'una <u>Dei due generi di Resistenze</u>, e l'altra <u>Del moto di discesa, o di ascendimento dei corpi solidi nei mezzi fluidi</u>.

Ella mi conservi la sua grazia pregiatissima, mi onori dei suoi comandi, e mi consideri quale con tutto l'ossequio mi sottoscrivo

Di V.S. Ill.ma

Treviso 26. Feb.o 1779

Ill.mo Sig.r Ab. Domenico Troili. Modena

Umil.mo Divot.mo ed Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

dano eguali è contrario intraprendere... sarà costantemente CB = CD, EC = CF, − CB = CE, − CD = CD: i triangoli DCB, CBF, CDE, CEF simili onde CD: CF; CE = CE : CF. Chiamando la linea CD, x la analogia proposta, per lo stimatissimo Sig.r Conte si deve convertire in $x : -x = -x : x$; onde la mia obiezione rimane sempre

48

pregiatma sua grazia, e mi onori de' suoi comandi, che io sono, e sarò
con tutto l'ossequio

Di V.S. Illma

Roma 24 Febo 1779

Umo, ed Obbmo Servo
Pedrino Mno

Errori corsi nella Lettera del Sig. Conte Giordano Riccati al Chiarissimo Sig. Conte Girolamo Zanaroli, in cui si determina l'equazione generalissima della Curva bilanciata, ed isocrona.

Pag.	Linea.	Errori.	Correzioni.
[illegible]	11.	E =	E
[illegible]	13.	accresca	accresca
[illegible]	12.	$x = \frac{L \cdot A^{co} R^{o} Seno\, y}{2b}$	$x = \frac{L \cdot A^{co} R^{o} c\, Seno\, y}{2b}$
[illegible]	16.	$\frac{z}{n \cdot 2b}$, e ne nasce $t = \frac{kz}{n \cdot 2b}\sqrt{\frac{LM}{2EB}}$	$\frac{z}{n \cdot 2b}$, e ne nasce $t = \frac{kz}{n \cdot 2b}\sqrt{\frac{LM}{2EB}}$
[illegible]	17.	$z = 2b$	$z = 2b$
[illegible]	2	$z = n \cdot 2b$	$z = n \cdot 2b$

dano eguale e contrario incremento ... CB = CD, EC = CF, – CB = CE, – CD = sarà costantemente CB = CD, EC = CF, – CB = CE, – CD = CF; e i triangoli BCD, CDF, CDE, CEF simili onde CD: CE = CE: CF. Chiamando la linea CD, x la analogia propo= sta, per lo stimatissimo Sig. Conte si deve convertire in x: – x = – x: x; onde la mia obiezione rimane sempre

48   82

pregiatma sua grazia, e mi onori de' suoi comandi, che io sono, e sarò
con tutto l'ossequio

Di V. S. Illma   Roma 24 Febo 1779   Umo, ed Obbmo
Pearnio Mo ...

Errori corsi nella Risposta alla Riflessioni Analitiche del Sig. Ab. Gioacchino Cassuti

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
31.	11	abbgli	abbagli
34	20	$\sqrt{-1}$, $a+\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$, $a+\sqrt{-1}$
58.	24	$a = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)$	$u = \frac{\cdot o\, 1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)$
74.	10	$e\sqrt[\phi]{-1}$	$e\sqrt[\phi]{-1}$
10).	5, 10, &c.	$f\left(\frac{a}{y}\right)^{y:h}$	$f\left(\frac{g}{y}\right)^{y:h}$
15.	11.	$f\left(\frac{a}{y}\right)^{m:n} = f.\pm\sqrt[n]{\left(\frac{a}{y}\right)^{m}}$	$f\left(\frac{g}{y}\right)^{m:n} = f.\pm\sqrt[n]{\left(\frac{g}{y}\right)^{m}}$
16.	14.	$f.\pm\left(\frac{a}{y}\right)^{y:h}$	$f.\pm\left(\frac{g}{y}\right)^{y:h}$
40.	4.	$A-4p\sqrt{-1}$, $A+6p\sqrt{-1}$, $A-6p\sqrt{-1}$	$A-6p\sqrt{-1}$
48.	19.	quasi	quai
61	18.	$HD' > HC$	$HD' < HC$
62	10.	AG	AG'
63	1.°	D', C &c.	D', D &c.

[illegible]

pregiatma sua grazia, e mi onori de' suoi comandi, che io sono, e sarò
con tutto l'ossequio

di V. S. Ill.ma

Roma 24 Feb.o 1779

Umil.mo, ed Obbl.mo [illegible]

Beamio [illegible]

7

65

data:

o equa

razioni

razioni

; ma

on è

; quin

roporzi

ione ho,

1 : -1

del

rdinate

è rispetto

gione

la ra=

la ra=

ione con

nega=

EC:

la

lianza

CB;

ma i

sarà AC:

migliana

: CE = CA

a CD

in y : -y

nologi

i nega

CE : CB

to CB

: -1 = -1 : 1

dal punto

to la li=

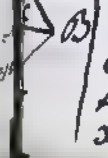
F, prin=

; CF

... incrementi

dano eguale e contrario incremento CB = CD, EC = CF, − CB = CE, − CD =

sarà costantemente CB = CD, EC = CF, − CB = CE, − CD =



sarà costantemente i triangoli DCB, CBF, CDE, CEF simili onde CD :

CF; e i triangoli DCB, CBF, CDE, CEF simili onde CD :

CE = CE : CF. Chiamando la linea CD, x la analogia propo=

sta, per lo stimatissimo Sig.r Conte si deve convertire in

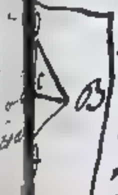
x : −x = −x : x; onde la mia obiezione rimane sempre

[illegible]
pregiatme sue grazie, e mi onori de' suoi comandi, che io sono, e sarò
con tutto l'ossequio
Di V.S. Illma   Roma 24 Febo 1779   Umo, ed Obbmo
Pegamio M.

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo

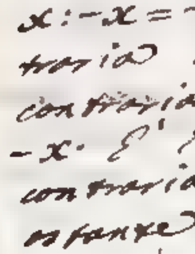
Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

..n la presente sono a rispondere alla sua dottissima in data
..9 Gennaro.
..a proporzione geometrica esigge, che gl'antecedenti contengano egual
..mente, e similmente i conseguenti. L'eguaglianza delle frazioni
..tro non ricerca, che l'eguaglianza delle continenze. Le frazioni
.., $\frac{-1}{2}$ sono certo eguali, perche eguali sono le continenze; ma
..icome il rapporto del numeratore 1 al denominatore -2 non è
..imile al rapporto del numeratore -1 al denominatore 2; quin=
..le due frazioni non costituiscono una geometrica proporzio=
..e: che i rapporti non siano simili è chiaro; mentre come ho
..servato in altra mia, e come osserva lo stesso Leibnitz 1:-2
..è il paragone del maggiore al minore; -1:2 è il paragone del
..minore al maggiore.
..l circolo alla stessa ascissa AC corrispondono due semiordinate
..CD, CE; onde fatta CD positiva sarà CE negativa; però rispetto
..a CD. Torno dunque a ripetere, che se la ragione
..di AC: CD si esprima per x:y non si possa la ra=
..gione di AC: CE esprimere per x:-y; e la ragione contra=
..gione. La ragione tra due quantità di posizione con=
..traria si esprime per la ragione del positivo al nega=
..tivo: ma AC non è di posizione contraria ad EC:
..unque la ragione di AC: CE non si puole esprimere per la
..agione del positivo x al negativo -y. Posta la somiglianza
..triangoli ACD, CDB, ACE, CEB; deduce AC: CD = CD: CB;
..CE = CE: CB onde x:y = y: a-x, x:-y = -y: a-x: ma i
..iangoli ACD, ACE sono por anche simili: dunque sarà AC:
..D = AC: CE; onde dovrebbe essere x:y = x:-y. Dalla somiglian=
..de triangoli DCA, ECA si deduce la proporzione CD: CE = CA:
..: se adunque benche CE sia di positione contraria a CD
..proporzione CD: CE = CA: CA non si puole convertire in y:-y
..:x; molto meno nel paragone, che si fa de lati omologi
..triangoli simili ECA, ECB ne quali niuno de lati, è nega=
..vo rispetto al suo omologo, la proporzione CA: CE = CE: CB
..potrà convertire in x:-y = -y: a-x
..l circolo essendo AC = x CB = AB - AC non sarà certo CB
..gativa rispetto ad AC. ma siccome la proporzione 1:-1 = -1:1
..deduce dalla somiglianza de triangoli: quindi se dal punto
..verso B, e da C verso D prendano eguale incremento le li=
..ee CB, CD; e dallo stesso punto C verso E, e verso F, pren=
..dano eguale e contrario incremento le linee CE, CF
..sarà costantemente CB = CD, EC = CF, - CB = CE, - CD =
..CF; e i triangoli DCB, CDF, CDE, CEF simili onde CD:
..CE = CE: CF. Chiamando la linea CD, x l'analogia propo=
..sta, per lo stimatissimo Sig.r Conte si deve convertire in
..x:-x = -x:x; onde la mia obiezione rimane sempre



valida; mentre se l'analogia CD : CE = CE : CF si converte in $x : -x = -x : x$ ponendo $-x$ in luogo di CE di posizione contraria a CB, non vedo perchè in luogo di CF di posizione contraria a CD per costruzione vi debba porre x e non $-x$. E' evidente adunque che benche CE sia di posizione contraria a CB; onde eguale a $-x$, fatta CB $= x$: ciò non ostante la ragione di CD : CE non si potrà esprimere per $x : -x$, non essendo EC in posizione contraria di C…

Nella Parabola all'ascissa AC corrispondono le due semiordinate CD, CE; onde fatta CD $= y$ sarà CE $-y$ rispetto a CD, non però rispetto ad AC. Se la ragione adunque di AC : CD si esprime per $x : y$ quella di AC : CE non si potrà esprimere per $x : -y$ non essendo EC in posizione contraria di AC. Similmente essendo i triangoli ACD, ACE simili sarà AC : … AC : CE; se adunque si faccia AC : CD $= x : y$, AC : CE $= x : y$ sarà ancora $x : y = x : -y$.



Nel circolo fatto l'unità raggio si ha $2x - x^2 = y^2$. Questa equazione dimostra incontrastabilmente essere $\pm\sqrt{2x-x^2} = \pm y$, $-y = -$… Nella mia in data 5 Gennaro ho dimostrato non potersi … tere la proporzione $+\sqrt{2x-x^2} : -y = -\sqrt{2x-x^2} : +y$; se pure non si alteri l'universalità di un generalissimo principio da … pur anche esposto. Lo stesso ho fatto vedere nella Parab… nella quale chiamando $\underline{a}$ il parametro, ho dedotto dall'equazione $ax = y^2$; $\pm\sqrt{ax} = \pm y$. Rimane ora a dimostrarsi che nella Parabola istessa si verifichino le due equazioni $\sqrt{ax} = \pm y$; e come similmente nel circolo possa essere … $= y$; $-\sqrt{2x-x^2} = -y$. Supposto il commune asse BAG si descriva il semicircolo BDA, quale segando l'asse nel punto … passi dalla contraria parte; onde si concepisca de… l'altro mezzo circolo AEG. La curva BDAEG sarà una curva continuata di due rami di contraria posizione onde se si stabilisca il ramo ADB positivo sarà il ramo AEG negativo. Ciò posto se AC si dica x, … AF $= -x$; se CD si dica y sarà FE $= -y$; onde … nendo l'ascissa AC = AD $= r$ sarà AG $= -r$. Es… do CD $= y$ media proporzionale tra AC, CB, sarà media proporzionale tra x e $r-x$. Similmente … do EF $= -y$ media proporzionale tra $-x$ e $-r+x$; si … prima proporzione $x : y = y : r-x$; che la seconda $-x : -y = -y :$ $-r+x$ danno la medesima equazione al circolo $rx - x^2 = y^2$

Da tutto ciò evidentemente costa essere primieramente … semiordinata negativa $-y$ media proporzionale non tra … e CD; ma tra le linee di posizione contraria quali sono …

Ill.mo Sig.r Sig.r Padrone Col.mo

39. In secondo luogo nel ramo ADB sarà CD $= y = \sqrt{ax-x^2}$, nel ramo opposto AEF sarà FE $= -y = -\sqrt{ax-x^2}$. Lo stesso si [può] dimostrare nella Parabola. La curva ABC è una continuata di due rami Parabolici di posizione contraria; onde facendo BE $= x$ sarà BD $= -x$, e dicendo AE y, sarà DC $= -y$; così similmente chiamando $\underline{a}$ il parametro nel ramo BA; sarà $-a$ il parametro del ramo BC; onde nel ramo BA si avrà la proporzione BE : EA = EA : a; overo $x : y = y : a$; e nel ramo BC si avrà BD : DC = DC : $-a$; o pure $-x : -y = -y : -a$. Sì la prima, che la seconda proporzione ci danno l'equazione alla Parabola $ax = y^2$. Da tutto ciò possiamo similmente ricavare, essere la semiordinata negativa media proporzionale non tra l'ascissa, e parametro positivo; ma bensì tra l'ascissa, e parametro negativo, oltre essere nel ramo BA; $y = \sqrt{ax}$, e nel ramo BC; $y = -\sqrt{ax}$.

Questo è quanto ho potuto riflettere sopra la sua stimatissima; lasciando dunque il tutto al suo imparziale giudizio, al solito mi do il vantaggio dirmi &c.

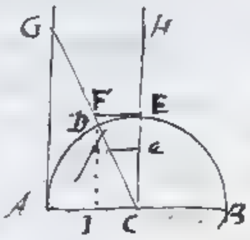
Di V.S. Ill.ma Roma 17 Febraro 1779

Umilissimo ed Obbligatissimo Servo
Giuseppe Calandrelli.

> 6

6 6

Tralasciando di aggiungere nuove considerazioni sulla formola $u = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$ &c. $z = \frac{\rho - \frac{1}{6}\rho^3 + \frac{1}{120}\rho^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{24}\rho^4 - \&c}$
mi rivolgo alla formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l\left(\frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right)$. Ella non intendo ~~[illegible]~~ perchè da ma si faccia la tangente $z = \frac{a^2}{n}$, quando supposta la stessa formola, ho trovato nella mia dei 13. Nov. $z = \frac{a}{n}$. Nelle due espressioni n significa due diverse quantità. In riguardo alla prima n dinota la cotangente FE dell'arco AD = u descritto col raggio AC = a, e rispettivamente alla seconda, fatta Ca = 1, e tirata af normale a CE, ad essa normale si agguaglia la specie n. Per la qual cosa in ambo i casi n rappresenta una linea, ed altresì la tangente AG = z si esprime per una linea, essendo $AG = \frac{AC.CE}{EF} = \frac{AC.Ca}{af}$.

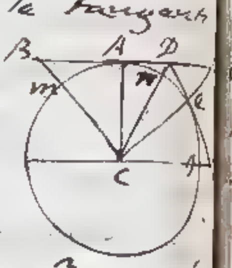


Il Ch. Sig. Abate si accorda l'equazione $-a^2 - a\sqrt{-1}.0 = -a^2$; dunque dividendo il tutto per nulla dee accordarsi ancora quest'altra $-\frac{a^2}{0} - a\sqrt{-1} = -\frac{a^2}{0}$. La quantità $\frac{a^2}{0}$, ch'è trascendentemente infinita, esige che si trascuri la quantità finita-immaginaria $a\sqrt{-1}$.

Dice, che supposta la somiglianza dei triangoli CID, CAG, ottimamente si determina la tangente $AG = \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$. In caso che l'arco AD si agguagli al quadrante, i triangoli svaniscono, ed in darno si tenta determinare la tangente del quadrante colla formola $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{0}$. Ecco come la determino. Sia $\sqrt{a^2-x^2} = y$ quantità infinitesima, e si proverà la tangente infinita $AG = \frac{a^2}{y}$, che apparterà ad un arco AD minor del quadrante. Cali y per metà, e crescerà AG il doppio, ma sarà per anche minore della tangente del quadrante. Seguiti y a decrescere e

De esiste $\frac{ax}{a-x} = \frac{a}{a-x} - 1$: Dunque al solito deve aggiungersi la costante necessariamente, mentre il primo della andarà privo. Dunque il metodo si un perchè richieggasi che il p.o Ipotesi sia A. Ch. R. a. Tiz il cioè $\frac{a}{a\sqrt{-1}} l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right) - b$, il terzo

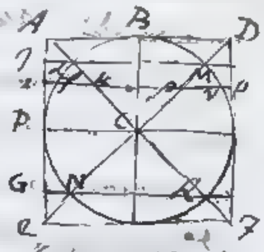
88 e s'aumenterà sempre più la tangente AG, spostandosi per
altro ad un arco minor del quadrante; sintantochè non
sia divenuto $y = a$. Il perchè la vera tangente del
quadrante sarà $= \frac{a^2}{0}$, come dovea dimostrarsi.
Non solo le tangenti di due archi simili, ma ancora le loro
cotangenti stanno come i raggi a, b. Chiamate z, Z
le tangenti, n, N le cotangenti, avremo $z = \frac{a^2}{n}$, $Z = \frac{b^2}{N}$
ma $n : N :: a : b$; e quindi $N = \frac{nb}{a}$; dunque $Z = \frac{ab}{n}$
e perciò, come dee stare, $z : Z :: a : b$. Divengano gli
archi due quadranti, e saranno le loro tangenti $z = \frac{a^2}{0}$
$Z = \frac{ab}{0}$, cioè a dire anche in questo caso le tangenti
proporzionali ai raggi.



Supposta la costruzione descritta nella sua
lettera, e fatta $AC = a$, $AD = eD = b$, AB
$= eF = x$, si trova $x = \frac{a^2-b^2}{2b}$, e la
tangente dell'arco Ae, cioè $AO = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{\left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right)}$. Se
l'arco Ae sia un quadrante, ne risulterà $b = a$
ed $AB = eF = x = \frac{a^2-a^2}{2a} = 0$; e per conseguenza
$AO = \frac{a^2}{0}$. Essendo x una linea, dee avere una
sola dimensione, e perciò dee esprimersi per $\frac{a^2-b^2}{2b}$
e quando si annulla, ha da porsi uguale ad $\frac{a^2-a^2}{2a} = a$
Nel luogo geometrico, la cui assissa $\pm n$, e le ordinate $\frac{\pm}{\pm}$
le dette ordinate hanno sempre il valore costante $= 1$
qualunque grandezza anche menomissima si attri-
buisca a $\pm n$. Ella concederà, che per la legge di conti-
nuità almeno a $\pm n = 0$ dee riferirsi l'ordinata $= 1$
ma in questo caso l'ordinata $\frac{\pm n}{\pm n} = \frac{0}{0}$; dunque $\frac{0}{0} = 1$
Si ella rifletterà pesatamente su questo argomento,

trovarà

si troverà evidentemente dimostrativo.
la forza della stessa diverrà maggiormente avvalorata dall'esempio da lui recato. Per quanto decresce la linea DG, si scema la fascia generata dalla linea GN uguale al circolo corrispondente, il cui diametro NQ, e perciò la fascia divisa pel circolo si agguaglia all'unità. Lo stesso trascorre della fascia, la cui larghezza il, che pareggia il circolo del diametro kp, e che divisa pel detto circolo mi dà il quoziente = 1, per quanto decresca la linea DL. Per la legge adunque della continuità nel sito D la fascia divisa pel circolo relativo dovrà essere = 1: ma nel detto sito tanto la fascia, quanto il circolo sono eguali a nulla; dunque $\frac{0}{0} = 1$. Ho detto, che in riguardo al punto D la fascia ed il circolo eguagliano il nulla. È uguale la fascia alla differenza di due circoli, i cui diametri per esempio io, kp; e perchè questi diametri nel sito D sono eguali, ella è nulla la differenza fra i due circoli, e perciò la fascia = 0. Il diametro kp nel punto C diviene = 0, e quindi il circolo descritto col diametro = 0 pareggia il nulla.



Il concedo essere nella parabola $\frac{dx}{dy} = \frac{ax + \frac{y\,dy}{a}}{y}$: concedo essere $ax + \frac{y\,dy}{a}$ sottosecante, e che questa diviene sottotangente, quando dy, dx quantità fluenti finalmente si annullano. In fatti HB diventa sottotangente, qualora sovrapponendosi l'ordinata CF alla BD, i due punti D, F si congiungono in un solo, e la linea HDF si cangia di secante in tangente. L'esattezza geometrica adunque dipende dall'annullarsi le due flussioni dx, dy, onde s'abbia nel caso della parabola $\frac{0}{0}$

Do essere $\frac{ax}{a-x} = \frac{a}{a-x} - 1$: Dunque al secondo debbe aggiungersi la costante necessariamente, quando il primo debba andarne privo. Dunque il metodo di cui parla richiederebbe che il 1° integrale sia A. [illegible], il 2° $\frac{a^2}{a\sqrt{-1}} L\left(\frac{a+2x\sqrt{-1}}{a-2x\sqrt{-1}}\right)$ [illegible]

$\frac{0}{0} = \frac{2x}{y}$. Ma perchè $\frac{0}{0}$ in diverse circostanze può ricevere diversissimi valori, egli è di uopo ricorrere al metodo Newtoniano delle flussioni, e cercare qual è l'ultima ragione di $dx : dy$ nel caso, che si ha fra le mani. L'ultima ragione si è quella, a cui sempre più si accostano dx, dy, secondochè vanno diventando più piccole. Essendo nella parabola $dx : dy :: 2x + \frac{ydy}{a} : y$, si avvicina una tal ragione sempre più a quella di $2x : y$ a misura che decresce la flussione dy, e perciò $2x : y$ è l'ultima ragione, la quale non per approssimazione, ma con geometrica esattezza determina la sottotangente $= 2x$.

Le due formole $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{-1}\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)$, che siccome da Lei si accorda, convengono esattissimamente, sono a dovere integrate, imperciocchè alla tangente $z = 0$, al seno $x = 0$ si corrisponda l'arco $u = 0$, presa l'unità come protonumero. Ora allo arco u uguale al quadrante $\frac{1}{2}p$ si riferisca il seno $x = 1$, e perciò in tale ipotesi $u = \frac{1}{2}p = \sqrt{-1}\, l\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot 2l\frac{1}{\sqrt{-1}}$: ma $2l\frac{1}{\sqrt{-1}} = l-1$; dunque $u = \frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l-1$. E perchè per l'altra formola $u = \frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$ ne segue dover essere $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -1$, il che non può giammai avverarsi, se rispettivamente alla tangente z, trascendentemente infinita non si trascura la quantità $\sqrt{-1}$. Essa quantità pertanto in tal circostanza va trascurata, onde si abbia per l'ultima

e per l'altra formola $u = \frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{-1}}{2} l_{-1}$.

Io non oserei di mettere in controversia la general verità della formola $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il cui integrale $u =$ Arco Rag. 1. Seno x. Quando $x = 1$, abbiamo $du = \frac{dx}{0}$, espressione, che dimostra l'incremento du del quadrante trascendentemente infinito rispettivamente all'incremento del seno $= dx$, e questo nullo in paragone di quello; il che si accorda col vero.

Desidererei moltissimo di convenire col mio Stimatissimo Sig. Ab., ma Ella sa che l'intelletto non può arrendersi se non che alla verità, e le riflessioni inserite nella presente lettera da me giudicate certe non mi permettono di cangiar opinione. Questa varietà di sentimenti per altro nulla pregiudica la pienissima stima, che nutro per Lei, e per la perfezion del suo ingegno, che mi fa sempre conoscere quale ho l'onore di protestarmi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 26. Febbrajo 1729.

P. S. Ho ricevuto la sua dottissima, e gentilissima lettera dei 20. Feb.o, a cui risponderò dopo averla maturamente considerata.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe [...]alandrelli. Roma.

Div.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Do essere $\frac{ax}{a-x} = \frac{a}{a-x} - 1$: Dunque il secondo della appropriata costruzione necessariamente, quantunque il primo della [illegible] [illegible]. Dunque [illegible] sicuro per, che [illegible] che il 1.mo [illegible] sia A. [illegible] il 2.o $\frac{a^2}{2\sqrt{-1}} L\left(\frac{a+2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}\right) - L1$; il terzo

> 6 9 4

8 65

>

:5

issime cose

nevole, e

fornmente

elementi,

ne perchè

ve, nulla

comparazio

le immaginarie,

no.

de ripiglio

$\frac{dz}{a+\sqrt{-1}}$

sione; ma

de, e la ste

so avare

differenzia

aggiunta dell

e conseguen

quel dovrebbe

in partenza

do, dovendo

do essere $\frac{ax}{a-x} = \frac{a}{a-x} - 1$: dunque al secondo deve aggiungersi la costante necessaria-mente, mancando il primo della medesima prima. Dunque il metodo sicuro perchè richiede che il p.mo integrale sia A.co e a.^{to} il $2.^{\text{o}}$ $\frac{a}{a\sqrt{-1}} L\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$ = L 1, quel terzo

> [illegible]

[illegible] [illegible]

La risposta di V. S. Ill.ma a' miei dubbj è stata, quale io già m'aspettava, gentilissima cioè, e dottissima; ma l'offerta, ch'ella mi fa della sua corrispondenza per me onorevole, e profittevole, per lei noiosa, ed incomoda, ha superato ogni mia espettazione, ed è sommamente obbligante. Quindi mi trovo in debito di rendere umilissime i più distinti ringraziamenti, poi di accettare la generosa, e cortese offerta con ossequio per conservarla, e gratitudine, ma perchè io mi riconosco troppo bisognoso delle sue istruzioni. Quanto al primo dubbio propostole, nulla manca alle sue spiegazioni, anche possano chiamarsi esatte, e proprie dimostrazioni. La comparazione de i tre esempj dichiarano a maraviglia la differenza del nulla reale dal nulla imaginario, e tutta la dottrina non soffre alcuna eccezione, io però senza dubbio ne resto pago, e convinto.

Quanto al secondo, qui è dove sono imbarazzato. Se io non m'inganno l'argomento da V. S. Ill.ma impiegato a provare, che non si deve aggiugnere la costante, si riduce a questo. Le formole $\frac{a^2dz}{a^2+z^2}$, $\frac{\frac{1}{2}adz}{a+z\sqrt{-1}}$, cioè $\frac{+\frac{1}{2}adz}{a-z\sqrt{-1}}$, $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\frac{1}{2}adz}{z-a\sqrt{-1}}-\frac{\frac{1}{2}adz}{z+a\sqrt{-1}}\right)$ non son differenti fra loro, che nella espressione; ma la prima si deve integrare senza addizion di costante: dunque ancor la seconda, e la terza. L'argomento ha gran forza, nè può negarsi, ma nasce una difficoltà, a cui non so trovare lo scioglimento. Le tre formole medesime non somministrano, che una stessa, e medesima differenziale capace di tre integrali; ed il primo, cioè A.co R.o a. T.te z non ammette l'aggiunta della costante, detto io dire perciò, che non l'ammette nè il secondo, nè il terzo? La conseguenza non par sicura. Imperocchè sia dy = $\frac{adx}{a-x^2}$. La differenziale $\frac{adx}{\overline{a-x}^2}$ è capace di due integrali, cioè $\frac{ax}{a-x}$, $\frac{a}{a-x}$. Il primo non ammette l'aggiunta della costante, perchè posto y = 0, e supposto che debba svanire anche la x, sarà $\frac{ax}{a-x}=0$; ma non è così del secondo, dovendo essere $\frac{ax}{a-x}=\frac{a}{a-x}-1$: dunque al secondo deve aggiungersi la costante necessariamente, ma nonostante il primo della medesima privo. Dunque il metodo sicuro par, che richiegga che il 1.mo integrale sia A.co R.o a. T.te z il 2.o $\frac{a}{2\sqrt{-1}}L\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)-L1$; il terzo

> 6

8 8

9 8

$\frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{-a-z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right) - l-1 = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right) = l1$ quando z, ed $u = 0$; l'inconseguenza [illegible] si riduce al secondo, il che sarebbe conforme all'opinione del Sig. Abate Bessuti. Nelle opposizioni el [illegible], io non suppongo, che $l1$, ovvero $l-1$ sia, o non sia $= 0$, ma faccio l'operazione [illegible] il calcolo, che mi insegna dover $l1 = 0$ quando $u = 0$, ma del valore di $l-1$ non dice nulla in [illegible] caso; giacchè potrebbe essere reale, e potrebbe anche essere imaginario. Il Sig. Abate [illegible] m'impone di significare V. S. Ill.ma e di presentarle i suoi rispetti, dunque poi [illegible], anch'egli molto perplesso, e dubbioso; onde egli, ed io la supplichiamo a darci qualche schiarimento.

Trattando la formola $du = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ esprimente l'arco u per il suo seno x osservo, che $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{1-xx}}$ $= \sqrt{-1}.\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$, ovvero $= \frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$. Integrando $\sqrt{-1}.\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$ senza aggiungere la costante si ha $u = \sqrt{-1}.l\,x+\sqrt{xx-1} = \frac{-1}{\sqrt{-1}}.l\,x+\sqrt{xx-1}$, e quindi $u\sqrt{-1} = -l\,x+\sqrt{xx-1} = l\left(\frac{1}{x+\sqrt{xx-1}}\right)$, dove $\pm 2mp\sqrt{-1} = l-1$. Integrando $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$ si avrà $u\sqrt{-1} = l\,x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}$, e quindi $\pm mp\sqrt{-1} = l1$, $\pm 2mp\sqrt{-1} = 2l1 = l1$, e però $l\pm1 = \pm 2mp\sqrt{-1}$. Allo stesso modo cava $l\pm1 = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$. Ma nell'integrando $\sqrt{-1}.\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$ aggiungo la costante, trovo $du\sqrt{-1} = -l\left(\frac{x+\sqrt{xx-1}}{\sqrt{-1}}\right)$ e quindi poi $l1 = \pm 2mp\sqrt{-1}$, $l-1 = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$, come il Sig. Abate Bessuti [illegible] che ancora la teoria si riduca a quella della costante.

Ho letto le cinque lettere del mio incomparabile Maestro, che sono il preziosissimo tesoro di [illegible]. Anche fatto $l-1-\infty = \infty$ cavandone le debite deduzioni, e però mi sono compiaciuto di non essermi [illegible] dal vero. Frattanto supplicando V. S. Ill.ma d'onorarmi de' suoi ammaestramenti come più mi [illegible], [illegible]

Di V. S. Ill.ma [illegible]

Modena 2 Marzo 1779

Umil.mo e Dev.mo Servitore
Giuseppe Contarelli

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Col.mo

S.

Al Nobil.e Ill.mo Sig.r Sig.r e Pron. Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Treviso

...li permetta lo stimatissimo mio Sig.r Conte, che alle tre ...onsecutive lettere da me già indirizzate aggiunga ancor... la quarta.

...Nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$ si moltiplichi il nume... ...ratore, e denominatore della frazione per $z + a\sqrt{-1}$, ed incon... ...trastabilmente si avrà $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{-az^2 - 2za^2\sqrt{-1} + a^3}{z^2 + a^2}$; e facendo il raggio $a = 1$, sarà $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{-z^2 - 2z\sqrt{-1} + 1}{z^2 + 1}$. Si faccia $u = 90°$; ...in questo caso crede il Sig.r Conte doversi essere $z = \frac{1}{0}$. ...Sia dunque $z = \frac{1}{0}$. Indicando il denominatore il zero as... ...soluto, mi si deve senza contrasto concedere essere $(\frac{1}{0})^2 = \frac{1}{00} = \frac{1}{0}$. Si faccia ora questa sostituzione nella formo... ...la, e si troverà $u = 90° = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{-\frac{1}{0} - \frac{2\sqrt{-1}}{0} + 1}{\frac{1}{0} + 1}$; qual formo... ...la è necessariamente immaginaria secondo le sue pro... ...prie idee. Mi si deve adunque necessariamente con... ...cedere, non poter mai la frazione $\frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$ divenire ...eguale, qualunque mai sia il valore di z; onde non pote... ...rsi il quadrante divenire eguale a $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log -1$.

...In secondo luogo supponendo il raggio $= 1$; sia il quadran... ...te p diviso in archetti eguali, ed infinitamente piccoli, sono ...esprimendo n l'infinito; $\frac{p}{n}$ uno di questi archetti, la tan... ...gente del quale archetto, sarà pure anche $\frac{p}{n}$; onde ...nella formola generale $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{-z - \sqrt{-1}}{z - \sqrt{-1}}$ in luogo di u e ...z sostituendo $\frac{p}{n}$, sarà $\frac{p}{n} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{-\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}{\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}$: onde ...$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \left(\frac{-\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}{\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}\right)^n$: ma la frazione $\left(\frac{-\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}{\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}\right)^n$ è ...una vera quantità immaginaria: dunque il quadrante ...non puole di bel nuovo divenire eguale a $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log -1$.

...D. Ab: Pozzi nel suo libro stampato in Madrid so... ...pra l'educazione de' Giovani Monaci, e per il quale ...giustamente si è meritati i rimproveri, ed il richia... ...mo da questa nostra Corte Romana, ha avuto an... ...che il bel coraggio di tacciare di oscurità le istituzioni

Matteo Luigi Canonici

94 analitiche del suo degnissimo fratello Conte Vincenzo.
Io sono persuaso, che del P. Pozzi in riguardo del Chia
Conte Vincenzo si possa dire ciò che il gran Leibnitz
diceva di Keill. Homo vanus gloriolam me impugnan-
do quesisse videtur. Questo P. Pozzi è Professore
di Matematica in questa nostra Sapienza Romana
ma questo non prova la sua abilità in questa scien-
za, mentre si persuada pure il mio Sig.r Conte, che
qui in Roma io veggo alla giornata sorgere de'
Matematici come a piè degli olmi il funghi
tempo di Autunno. Io al solito mi dico.
di V. S. Ill.ma Roma 6 Marzo 1779.

Umiliss.o ed Obbligat.mo Servo
Giuseppe Calandrelli.

letto,

occa

tra quali

3x

Matteo Luigi Canonici

8

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Ricca.ti

Venezia p. Trevigo.

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Nob: Sig.r Co: Sig.r Pron Col.mo 99

[...]lla passata sera consegnai al Proc: di Firenze il
pacchetto, giacchè non mi si presentava oppor=
tuna occasione sino colà; l'ho diretto ad un
mio grande Amico Ecxges: per nome Ab.te Luigi
Pannizzoni; l'ho incaricato di passarlo al Molini
di trarne, e rimettermi la ricevuta, e se di più
[...]lla bramerà dall'opra di Lui credo certo potermi
[d]i tutto comprometere; la spesa di francatura con-
segna[...] monta in tutto a lire 5 nostre. Desidero
che tutto riesca a genio di Lei anche per godere
l'onore di nuovi suoi comandi, in attenz:ne de'
[qua]li protestomi con pienis.ma stima, e risp.o

Di Lei Nob. Sig: Co:

Ven.a 8 Marzo 79
I. Ben.o

Dev.mo Obb. Ser.re Vo
Matteo Luigi Canonici

100

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

o di quelle
essa parmi
ella mia
z; del
re a retto
:
erali una
dermin;
to, dare
si una
tivi quali
va hanno
ispettive
formato la
li come
se nelle
me, o sia
nie positiva,
$\sqrt{\beta^x} = \sqrt{-\beta^x}$
li, com'è
dedursi,
e de ll'altro
menti, del
are.

nte ser nata
a piccol

Al Nob: Sig.re Sig: Pron Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Treviso

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Il Sig.r Don Giulio Dugnani, già uno de' più studiosi convittori di questo Coll.gio, ed al presente mio buon Padrone ed Amico desidera d'arricchire la sua libreria delle Opere di V. S. Ill.ma e de' Suoi Signori Fratelli, e Padre. Egli ne tiene alquante ma vorrebbe compierne la serie. Supplico dunque V. S. Ill.ma che si compiaccia di trasmettere a me un indice intero di tutti i libri prodotti sotto l'Illustre Nome Ricati, segnando insieme le stampe migliori, e il loro prezzo ordinario.

Ho parlato qui col Reverendiss. Padre Frassen, il quale con molto suo onore e numeroso concorso predica nella R. I. cap. di Santa Maria della Scala, già Sacr. fedele, e abbiamo insieme fatta dolce commemorazione della persona, e degli studii di V. S. Ill.ma. Il medesimo Frà mi ha detto che il celebre Frà Maestro Valloti stampa un Opera appartenente alla Musica. Bramerei intendere da V. S. Ill.ma quale Opera sia questa e quanto sarà il prezzo. Nello stesso tempo mi sarebbe cosa gratissima se mi facesse intendere a qual prezzo si vendano dal Sig.r Domenico Pompeati Stampatore e Libraio in Venezia, i due primi Tomi che egli ha impressi de' Salmi Marcelliani. Essendo stata quella nobile Ristampa sfortunatamente sospesa e abbandonata, penso che i due detti Tomi, come opera rotta, si venderanno a picciolissimo prezzo, e in tal caso forse alcuno di questi Convittori ne farà acquisto.

Ho sempre vigilato per trovare i Compositori opportuni per gli miei Salmi. Non ho avvisato V. S. Ill.ma dei passi che io faceva di mano in mano per non ano

rio di quelle
e presso parmi
e della mia
ha, che
dine a retto
lui.
Porrei una
credermi,
debo, come
nessuna
equivi uguali
litiva hanno
rispettive
formasi la
li come
base nelle
assume, o sia
serie positiva,
cioè $L\beta^x = L-\beta^x$

Non segue però altro da questa equazione, che possa passarsi all'altra di $\beta^x = -\beta^x$, la quale, com'è evidente è assurda; onde quantunque i logaritmi siano uguali non può generalmente dedursi, che le q.tà, alle quali corrispondono siano uguali se non nel caso, che i termini dell'uno, e dell'altro membro dentro il segno L siano o tutti positivi, o tutti negativi. Sarà vero bensì generalmente, che se le q.tà saranno uguali, saranno pure uguali i loro logaritmi riferiti ad una medesima base.

noiarla essendo stati per la più parte inutili. Nondimeno spero che dentro l'anno corrente sarà compiuto quel piciol numero che io hò disegnato [illegible] uso. Le desidero e prego dal Cielo ogni maggiore prosperità, e col più pro[illegible] ossequio, e la più sincera, e viva affezione mi protesto

Di V. S. Illma

Milano Collegio Imple 9. Marzo 1779.

[illegible]
Giro. Sacchi [illegible]

[illegible]

rio di quelle

e presso parmi

o della mia

ha, che

dine a tutto

mi.

derai una

indermin,

itto, dove

desi uno

gativi uguali

l'altro danno

e rispettive

ormato la

li come

base nelle

esime, o tra

serie positive,

cioè $L\beta^x = L-\beta^x$

Non segue per altro da questa equazione, che possa passarsi all'altra di $\beta^x = -\beta^x$, la quale, com'è evidente è assurda; onde quantunque i logaritmi sieno uguali non può generalmente dedursi, che le q.tà, alle quali corrispondono sieno uguali se non nel caso, che i termini dell'uno, e dell'altro membro dentro il segno L sieno o tutti positivi, o tutti negativi. Sarà vero bensì generalmente, che se le q.tà saranno uguali, saranno pure uguali i loro logaritmi riferiti ad una medesima base.

10

All'Illmo Sig. Sig. Pne Colmo

Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

BB

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Col.mo

A schiarimento di ciò, che ultimamente scrissi a V. S. Ill.ma le trasmetto uno squarcio di quelle riflessioni, che sono andato facendo sulla natura de' logaritmi. La traccia, che ho presa parmi che sia abbondante di lumi, che pleno alveo fluunt, ed ora mai sono al termine della mia fatica. Lo squarcio presente riguarda i logaritmi delle q.tà negative reali, e mi sembra, che restino sciolti alcuni nodi, che pareano indissolubili. Quando avrò dato qualche ordine a tutto ciò, che ho scritto sarò a supplicarla di leggerlo, e di manifestarmi le sue correzioni.

Dopo di aver parlato nelle mie riflessioni de' logaritmi delle q.tà reali positive, i quali si traggono dal considerare una serie geometrica formata dalle potestà della base logaritmica dico di non poter persuadermi, che i logaritmi delle q.tà negative sieno immaginarj, come da insigni autori si è creduto, ~~e~~ particolarmente in oggi dal S.r Eulero. Imperocchè se in vece della base positiva, prendasi una base negativa, e con essa si costituisca una serie geometrica, averemo tanti prodotti negativi uguali alle potestà negative ~~della~~ base ~~predetta~~ in quella stessa guisa, che le potestà della base positiva danno tanti prodotti positivi, onde gli esponenti della base negativa saranno i logaritmi delle sue rispettive potestà, e però non vedo qual assurdo in ciò sia. In fatti presa la base B negativa, e formata la serie geometrica delle sue potestà negative prendansi quattro termini in essa proporzionali come $-B^x : -B^y :: -B^v : -B^f$ sarà $x + f = y + v$ vale a dire, che non entrando punto la base nelle proprietà de' logaritmi di quantità di una stessa natura, le proprietà restano le medesime, o sia la base positiva, o sia negativa, ed i medesimi logaritmi servono tanto ai termini della serie positiva, quanto ai termini della serie negativa, cosicchè sarà $x = L B^x$, ed $x = L -B^x$, e però $L B^x = L -B^x$. Non segue però altro da questa equazione, che possa passarsi all'altra di $B^x = -B^x$, la quale, com'è evidente è assurda; onde quantunque i logaritmi sieno uguali non può generalmente dedursi, che le q.tà, alle quali corrispondono sieno uguali se non nel caso, che i termini dell'uno, e dell'altro membro dentro il segno L sieno o tutti positivi, o tutti negativi. Sarà vero bensì generalmente, che se le q.tà saranno uguali, saranno pure uguali i loro logaritmi riferiti ad una medesima base.

Essendo pertanto $x = LB^x$, ed $x = L{-B^x}$ resta chiaro, che il logaritmo non ha forza di mu[tare] la natura della base, nè p. conseguenza dei prodotti di essa, talchè se la base è negativa saranno esser sempre negativi tutti i prodotti, che compongono la serie geometrica formata da d.a base, e sempre positivi, se la base sarà positiva.

Suppongasi la base $= -B$, e le potestà negative di essa formino la serie
$-B^x : -B^y :: -B^z . -B^t :: -B^v : -B^f :: -B^h : -B^m$

Quindi essendo $-B^x : -B^y :: -B^v : -B^f$ si avrà $x+f = y+v$; ma $x+f = L{-B^{x+f}}$ in quella serie, e parimenti $x+f = L{-B^x} + L{-B^f}$ nella medesima serie; dunque $L{-B^{x+f}} = L{-B^x} + L{-B^f}$, ma non già $L{-B^{x+f}} = L\overline{-B^x . -B^f} = LB^{x+f}$, come si è raccolto nei logaritmi delle q.tà positive. Quindi è, che $L{-a^2} = L{-a} + L{-a} = 2L{-a}$, cioè $2L{-a} = L{-a^2}$ non $= La^2$

Si dirà, che questa è una contradizione, perchè avendo dimostrato poc'anzi essere $LB^x = L{-B^x}$ dee essere ancora $L{-a^2} = La^2$. Rispondo esser verissimo $L{-a^2} = La^2$, ed essere parimenti falsissimo. È verissimo ove le basi siano diverse, è falsissimo quando si tratti di una medesima base. In fatti, come si è notato non può mai essere $-a^2 = a^2$ contuttochè gli esponenti siano uguali; ed $L{-a^2}$ appartiene ad una base negativa, La^2 ad una base positiva. Bene stà dunque, che essendosi presa la base negativa non sia mai $L{-a^2}$ nella base medesima, essendo ciò impossibile. Di qui, e dal vedere, che gli esponenti sono incapaci per se di far mutar natura alla base, è avvenuto, che si sono annoverati fra le q.tà immaginarie i logaritmi delle quantità negative. Ma se quelli, che hanno così stimato avessero fatto uso della base negativa, avrebbero trovati reali i logaritmi delle q.tà negative, come son quelli delle q.tà positive. Ciò basti per ora, che l'avrò veramente strapazzata. Scusi il disordine, in cui ho esposto la materia, e molte espressioni, che richieggono di essere migliorate. Ma ciò, che ho finora fatto non è, che un abbozzo, spero di ridurlo a forma migliore. Io sono frattanto con tutto l'ossequio

Di V.S. Ill.ma — Roma 10 Marzo 1779 — Umil.mo ed obbl.mo Devotiss.mo Ser.re

158

5

All' Ill.mo Sig. Sig. Pron.e Col.mo
Il N. U. Sig. Co. Giordano Riccati

Treviso.

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 107 23

...riservata attentamente la dottissima sua lettera dei 20. Febb.o; osservo, che la logistica curva nascendente necessariamente richiede, che corrispondano infiniti logaritmi ad un

Sig. Arcip.te Prone Riv.mo 105

...spedito il mio M.S. al Sig. Ab. Canonici pregandolo di farlo tenere in Firenze al Sig. Ab. Ximenes; ma egli mi rispose, che probabilmente questi sarà ora assente, cioè a dire o alle Maremme di Siena, o altrove, e che quando glie lo avessi permesso, invierebbe l'Opera ad un suo grande Amico il Sig. Ab. Luigi Pannizzoni. Avendo io a ciò aderito, ha mandato sabbato scorso il pacchetto al mentovato Abate, incaricandolo di passarlo al Molini, e di avvisarne, e di rimettergli la ricevuta, ed aggiungendo, che se di più io bramerò dall'opera di lui, crede certamente di potersi compromettere di tutto. Oggi il M.S. sarà in Firenze, ed il Sig. Prof Toaldo ne avrà dal Molini quanto prima il riscontro. Ella avvisi di tutto ciò lo stimat.mo Sig. Prof., gli faccia i miei complimenti, e mi creda a tutta prova

Di Lei Sig. Arcip.te Riv.mo

Treviso 11. Marzo 1779.

Ill.mo Sig. Arcip.te Giambatista Nicolai. Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

106

Ill.mo Sig.re Sig.re Padron Colmo 107

...derata attentamente la gentilissima sua lettera dei 20. Febb.o, osservo, che la logistica curva trascendente necessariamente richieda, che corrispondano infiniti logaritmi ad un

[illegible]

...ata la
...
...
...
...
...ie logaritmi
...
...
...$\sqrt{-1}$, e
...
...
...
...
...
...abile
...
...
...
...della
...

5/3

…siderato attentamente la dottissima sua lettera Dai suo. Tubi.c;
ossservo, che la logistica curva trascendente necessariamente
richiede, che corrispondano infiniti logaritmi ad un
dato numero, fra i quali un solo è reale, e gli altri
tutti immaginarj. Si ricerchi col mezzo dell' equazione
$(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$ il valore di $y = l1$, e si troverà non solo
$y = 0$ valor reale, ma ancora gli infiniti valori immagi
narj $y = \pm n\lambda p\sqrt{-1}$. L'aver supposto l'intero il valor
reale di $\frac{y}{n} = 1$ non esclude gli infiniti valori imma:
ginarj indispensabilmente richiesti dal grado della
equazione.
problema, ch'ella reca in esempio, dovrebbe esporsi
così. Cercare quell' arco, la cui tangente $= x$, che
triplicato esiga la tangente uguale al raggio del
circolo. Supposto il raggio $= 1$, si perviene all' equa:
zione $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$, le cui radici $x = 2 - \sqrt{3}$,
$x = 2 + \sqrt{3}$, $x = -1$. La tangente $2 - \sqrt{3}$ appartiene
all' arco $= \lambda p + 15^0$, che triplicato s'eguaglia
a $3\lambda p + 45^0$, e ricerca la tangente $= 1$. Compete
la tangente $2 + \sqrt{3}$ all' arco $= \lambda p + 75^0$, che moltri
plicato per tre diviene $= 3\lambda p + 225^0 = (3\lambda + 1)p + 45^0$
e si appropria la tangente $= 1$. Spetta finalmente
la tangente $= -1$ all' arco $\lambda p + 135^0$, che triplicato
s'eguaglia a $3\lambda p + 405^0 = (3\lambda + 2)p + 45^0$, ed anche
questo esige la tangente $= 1$. Ora siccome fissata
la tangente $= 1$, si determinano tre valori della
tangente x degli archi suttripli, perchè l'equazio:
ne è del terzo grado; non altrimenti stabilita il
numero

della costante …
battente la discorro così. Le due formole sono sem:
pre vere, qualunque sia il protonumero, che si
sceglie. E giacchè si tratta di trovare i logaritmi
di

vera la … assiomo per: … scriptum: … fondata … de' dei … i logaritmi … ratione del … potenze dell … $\sqrt{-1}$, e … (punti) … m'istruba … ond per … li, conviene … afare … iplorabile … ovvio gior: … dunque … la desiderata della … se som:

numero $=1$, hanno ad esso da corrispondere infi[niti]
valori del suo logaritmo; perchè risulta il gr[ado]
$(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$ dalla formola $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$.

Chè nell'equazione $\frac{y}{n} = \cos.\frac{\lambda p}{n} - 1 \pm \sin.\frac{\lambda p}{n}\sqrt{-1}$ si possa trascurare la grandezza $\cos.\frac{\lambda p}{n} - 1$, onde si abbia $y = \pm \sin.\lambda p\sqrt{-1}$, si deduca da ciò, che la stessa espressione si raccoglie dalla certissima equazione $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$ qualmente ho provato nella mia Lettera dei 12 Genn[aio]. Ella frattanto da par suo la discorre in tal guisa. Se lecito trascurare una quantità reale minima ~~reale~~ rispetto niente ad una quantità ~~finita~~ immaginaria, sarà an[che] concesso il cancellare una quantità ~~minima~~ immaginaria quando è congiunta con una quantità ~~finita~~ reale, [che] sia relativamente infinita. Si osservi essere $\frac{z\sqrt{-1}+a}{z\sqrt{-1}-a} = \frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$; e potendosi, quando $z = \infty$, negligere [a] mio avviso nella prima espressione, onde si abbia $\frac{z\sqrt{-1}+a}{z\sqrt{-1}-a} = 1$, sarà permesso altresì il trascurare $\mp a\sqrt{-1}$ nella seconda espressione, dimodochè si trovi a notare $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}} = 1$. L'argomento mi convince e quindi io debbo confessare di avere malamente concesso nella mia dei 10 Ottobre, doversi essere la frazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ immaginaria, benchè z sia infinita relativa rispetto ad a.

Negletta la grandezza $\cos.\frac{\lambda p}{n} - 1$, ne risulta $\frac{y}{n} = \pm \sin.\frac{\lambda p}{n}$ [...]
$1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \sin.\frac{\lambda p}{n}\sqrt{-1}$. Se sostituiremo questo valo[re] nella formola $(1+\frac{y}{n})^n = 1$, troveremo $(1 \pm \sin.\frac{\lambda p}{n}\sqrt{-1})^n$ [...] equazione, che non può esattamente avverarsi, per[chè] nella

nella potestà $(1 \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n$ avranno sempre luogo gli immaginarj, eccettuato il caso di $\lambda = 0$. Egli è vero che gli immaginarj vi avranno luogo, ma questi saranno trascurabili rispettivamente alle quantità reali, e perciò sussisterà l'equazione $(1 \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n})^n = 1$ ultima sua riflessione prova veramente essere dalla imperfezione nel metodo dell'Eulero. Se n è pari il massimo valore di supporremo $\lambda = \frac{n-2}{2}$, e posto n dispari, si troverà il detto massimo valore $\lambda = \frac{n-3}{2}$. Avremo dunque nella prima ipotesi, quando λ è giunto al massimo, $\frac{y}{n} = \pm Se.\frac{(n-2)p\sqrt{-1}}{n}$, e nella seconda $\frac{y}{n} = \pm Se\frac{(n-3)p\sqrt{-1}}{n}$. Ora potendo λ ricevere dalla serie 0, 1, 2, 3, 4 &c. qualsivoglia valore posto fra 0, ed $\frac{n-2}{2}$ se n è pari, e fra 0, ed $\frac{n-3}{2}$, se n è dispari, addiverrà, che se è infinita la proporzione di λ ad n, il che può verificarsi anche quando λ è infinito, purché sia immensamente minore di n; il metodo dell'Eulero mi conduce al vero, e rettamente si trova $Co.\frac{2\lambda p}{n} - 1 = 0$, $Se.\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n} = \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, ed $\frac{y}{n}$, $y = l1 = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. Ma se è finita la ragione di λ ad n, il metodo dell'insigne Autore mi guida al falso; perché nella formola $\frac{y}{n} = Co.\frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm Se.\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, io non posso mettere $Co.\frac{2\lambda p}{n} - 1 = 0$, $\pm Se.\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n} = \pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, onde mi si presenti $y = l1 = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. Questa imperfezione del metodo dell'Eulero è patente, né può certamente negarsi. Non incontra ~~questo~~ tale scoglio chi deduce i valori di $l1 = y$ dalla formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l\left(\frac{[illegible] - \sqrt{-1}}{2 - \sqrt{-1}}\right)$; la quale dà senza eccezione alcuna $\pm 2\lambda p$

dalla costante.

battente la discorro così. Le due formole sono sempre vere, qualunque sia il protonumero, che si sceglie. E giacché si tratta di trovare i logaritmi

di

$\pm \lambda p \sqrt{-1} = l 1$. Imperciocchè fatta la [illegible] $z = 0$, abbiamo $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l 1$: ma in detta circostanza $u = \mp \lambda p$; dunque $\mp \lambda p = \frac{\sqrt{-1}}{2} l 1$, e moltiplicando per $-2\sqrt{-1}$, $\pm 2\lambda p \sqrt{-1} = l 1$; il che &c.

La cagione della imperfezione del metodo dell'Eulero ~~in modo che~~ dipende da ciò, che facendo $\log (1+\frac{y}{n})$ ~~supponendo~~ questa posizione necessariamente richiede, che $\frac{y}{n}$ sia ~~[illegible] ad un dato infinito, e mettendo~~ $= \frac{y}{n}$ minima in riguardo ad 1; imperciocchè allora la quantità ~~[illegible]~~ della logaritmica, che stia come la sussecuente $\pm$ ~~[illegible] Newtoniana, [illegible]~~ proporzionale $= 1$; così il logaritmo dell'unità più la ~~[illegible]~~ minima $\frac{y}{n}$ alla stessa quantità minima $\frac{y}{n}$, onde ~~[illegible]~~ risulta l'equazione $l(1+\frac{y}{n}) = \frac{y}{n}$. E perchè i valori imaginari di y sono uguali a $\pm 2\lambda p \sqrt{-1}$, dovrà essere infinitesima la grandezza $\frac{y}{n} = \pm \frac{2\lambda p \sqrt{-1}}{n}$, e per conseguenza λ immensamente minore di n. Tra le radici adunque ~~[illegible]~~ equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$, a cui perviene l'Eulero, quelle soltanto spettano alla logistica, in riguardo alle quali si verifica la condizione, che λ sia minimo rispettivamente ad n. Se n ascendesse all'infinito assoluto, in tale ipotesi valendosi dell'ultima sua riflessione, Ella può giustamente impugnare il metodo dell'Eulero, e far anche uso dell'avvertenza da me fatta testè, qualora la giudichi conforme alla verità. Esposto il mio sincero parere, mi rassegno col maggiore rispetto

* potrebbe λ eguagliarsi a qualunque infinito relativo.

Di V. S. Ill.ma

Treviso 1. Marzo 1779

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe Catenacci. Roma

Umil.mo ed Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

intese con molto dispiacere il solito gagliardo
raffreddore, che da Lei si soffre ogni anno così.

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo   111

Espressioni contenute nella sua gentilissima lettera di V. S. Ill.ma sono sommamente obbliganti, e degne del suo bell'animo. Io le debbo ringraziare, ch'ella accetti con tanta benignità la mia corrispondenza e ben vedrà dalla presente mia quanto profitto io sia per raccoglierne.

piacere, che sia del tutto quieto e contento intorno al primo dubbio, e che la comparazione dei tre esempj le abbia chiaramente mostrata la differenza del nulla reale dal nulla immaginario.

Quanto al secondo dubbio, la difficoltà, che nuovamente mi propone, è di sommo peso. La regola certa nell'integrare è di aggiunger sempre la costante, cercando, poscia se l'aggiunta sia necessaria, sì o no. Aggiungendo la costante nella formola del Sig.r Ab. Pessuti, si avrebbe $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(a+2\sqrt{-1}) - l(a-2\sqrt{-1}) - la + la\right)$: ma $-la + la = 0$; dunque rettamente ha stabilito il Sig. Pessuti $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(a+2\sqrt{-1}) - l(a-2\sqrt{-1})\right)$.

...sso alla mia formola, che coll'addizione della costante va integrata nella seguente maniera
$u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(z-a\sqrt{-1}) - l(z+a\sqrt{-1}) - l{-a\sqrt{-1}} + la\sqrt{-1}\right)$. Per dir il vero il Sig.r Ab. Pessuti, che nega essere $l{-a\sqrt{-1}} = la\sqrt{-1}$, non può mai accordare il tralasciamento della costante.

Pertanto la discorro così. Le due formole sono sempre vere, qualunque sia il protonumero, che si sceglie ... giacchè si tratta di trovare i logaritmi

di

$\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = l1$. Imperciocchè fatta la tangente $z = a$, abbiamo $u = \sqrt{-1}\, l1$: ma in detta circostanza $u = \pm\lambda p$; dunque $\pm\lambda p = \sqrt{-1}\, l1$, e moltiplicando per $-2\sqrt{-1}$, $\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = l1$. il che &c.

112

di $\pm 2ap$ si ponga primieramente nella formola del Sig. Ab. Dassuti il protonumero $= 1$. Il quarto termine dell'analogia $a-2\sqrt{-1} : a+2\sqrt{-1} :: 1 : \frac{a+2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}$ mi si segna essere nell'ipotesi del protonumero $= 1$. $l(a+2\sqrt{-1}) - l(a-2\sqrt{-1}) = l\left(\frac{a+2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}\right)$, e per conseguenza $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{a+2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}\right)$. Da questa formola, facendo $a = \ldots$ raccoglie il Sig. Ab., chiamata p la mezza circonferenza del raggio $= 1$, $l1 = 0, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}$ &c. Ne deduce inoltre $l{-1} = \pm p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}$ &c. e cava quelle conseguenze, che si leggono nelle sue Riflessioni Analitiche.

Metto in secondo luogo il protonumero $= -1$. e questo analogo al protonumero $= 1$, essendosi mostrato col mezzo della quadratura dell'iperbola fra gli assintoti, che fissato 1 come protonumero, è necessariamente tale anche -1. Coll'analogia $a-2\sqrt{-1} : a+2\sqrt{-1} :: -1 : \frac{-a-2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}$ trovo $l(a+2\sqrt{-1}) - l(a-2\sqrt{-1}) = l\left(\frac{-a-2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}\right)$, e perciò $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-a-2\sqrt{-1}}{a-2\sqrt{-1}}\right)$ ch'è la formola da me scoperta, dalla quale ho dotto $l{-1} = 0, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}$ &c.
$l1 = \pm p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}$ &c.

L'aggregato adunque delle due formole mi dà $l{\pm 1} = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}$ &c. conseguenza, che gitta a terra tutto il raziocinio del Sig. Ab. Dassuti.

Maneggiando con simile metodo la mia formola ci

intaso con molto dispiacere il solito gagliardo raffreddore, che da Lei si soffre ogni anno costì.

(13)

mi si presentava $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(z-a\sqrt{-1}) - l(z+a\sqrt{-1}) - l.a\sqrt{-1} + l.a\sqrt{-1}\right)$ $= \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-a-z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$, secondochè si assumeva per protonumero ± 1, e si determinavano i separati valori di $l\pm 1$ ...

integrazione della mia formola effettuata nella Risposta sembravami per altro, che si possa fondatamente difendere, quantunque non abbia aggiunta costante. Avendo io scoperto $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(z-a\sqrt{-1}) - l(z+a\sqrt{-1})\right)$, ed essendomi servito nella riduzione del protonumero $=1$, sono finalmente pervenuto all'equazione $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{-a-z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)\right)$ la quale ponendo $a=1$, $u=0$, $z=0$ mi somministra $0 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l{-1}$. Una tal maniera di operare s'accorda esattamente con ciò, che si ricava dalla quadratura dell'iperbola fra gli assintoti, e fa vedere l'accoppiamento dei due protonumeri ± 1. Supposto nella riduzione il protonumero $=1$, e trovando poscia $l{-1} = 0$, mi si affaccia una conseguenza, che dalla quadratura suddetta è provata vera, e ch'io non posso rifiutare. Se nella riduzione avessi usato il protonumero -1, mi si sarebbe presentata la formola del Sig. Ab. Rassuti, in cui ad $u=0$ corrisponde $l1$, ed anche in tal guisa averei insieme congiunti i due protonumeri ± 1.

Supplico l'ornat.mo Sig. Abate ad esaminar quanto ho scritto, e comunicarlo al ch. Sig. Avvocato Cassiani, e a partecipare il rispettatissimo loro parere. Quando restassero

appagati

110

$\pm \lambda p \mp \sqrt{-1}\, l_1$. Imperciocchè fatta la tangente $z = a$, abbiamo $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l_1$: ma in detta circostanza $u = \mp \lambda p$; dunque $\mp \lambda p = \frac{\sqrt{-1}}{2} l_1$, e moltiplicando per $-2\sqrt{-1}$, $\pm 2 \lambda p \sqrt{-1} = l_1$: il che &c.

114

appagati delle mie riflessioni, per prevenire le opposizioni del Sig. Ab. Dassuti, Ella potrebbe indirizzare una lettera all'Autore anonimo della Risposta, proponendo i suoi dubbj, ed egli le risponderebbe sciog-dolò, ed amendue queste Lettere si inserirebbero in codesto Giornale.

Mi continui V.S. Ill.ma la preziosa sua grazia, ed esibendomi ai suoi comandi, ho l'onore di protestarmi di piena stima, e rispetto

Di V.S. Ill.ma

Treviso … Marzo 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli. Modena

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

[H]o inteso con molto dispiacere il solito gagliardo raffreddore, che da Lei si soffre ogni anno costì. Ha fatto ottimamente di astenersi dalli applicare; perché si fatti incomodi esigono del riguardo. [M]a è di parere, che non sia $2l\pm\sqrt{-1} = l-1$, perché il primo membro è immaginario, ed il secondo reale. La prego frattanto ad avvertire, che ancora il secondo membro è immaginario, agguagliandosi $l-1$ a $\frac{p}{\sqrt{-1}}$. La proprietà, che ad una serie geometrica di numeri si debba riferire una serie aritmetica di logaritmi, forma l'essenza della logistica, e perciò si debba avverare senza alcuna eccezione. Nel caso, di cui si tratta, avremo le due serie

geometrica di numeri 1, $-\sqrt{-1}$, -1, $+\sqrt{-1}$, 1

aritmetica di logaritmi 0, $\frac{2\cdot\frac{1}{4}p}{\sqrt{-1}}$, $\frac{2\cdot\frac{1}{2}p}{\sqrt{-1}}$, $\frac{2\cdot\frac{3}{4}p}{\sqrt{-1}}$, $\frac{2p}{\sqrt{-1}}$

Che sia $\frac{p}{\sqrt{-1}} = l-1$, si prova invincibilmente così. Per la formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$ abbiamo, quando la tangente $z=0$, $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l1$: ma a $z=0$ corrispondono gli archi $0, p, 2p$ &c.; dunque ponendo $u=0$ si scoprirà $l1=0$, e ponendo $u=p$ troverassi $l1 = \frac{2p}{\sqrt{-1}}$. Questi due valori di $l1$ sono relativi ~~corrispondono~~ ai termini primo, e quinto della serie geometrica. E poiché -1 è medio geometrico fra 1, ed 1, ne segue che il suo logaritmo ha da essere medio aritmetico fra 0, e $\frac{2p}{\sqrt{-1}}$, agguagliandosi

per

merla così $\sqrt{2ax-xx} = zy$, ~~[illegible]~~ apparisca, che alla stessa assissa x due ordinate rispondono situate contrariamente. I due semicircoli, di cui si serve, non appartengono allo stesso

circolo

per conseguenza a $\frac{p}{\sqrt{-1}}$; il che &c.

Essendo dunque per una parte $\frac{n}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{2}p = l{-1}$, e per l'altra $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{-1}}{n}\, l\left(\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}\right)$ nella ipotesi di $z = \infty$, ossia $\frac{n}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{2}p = l\left(\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}\right)$, si inferisca essere in detta circostanza $\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}} = -1$; il che serve a scioglere la seconda difficoltà da lei proposta.

La base B della logaritmica è fornita di infiniti valori, due reali, e gli altri immaginarj. Si stamparono nel Giornale di Modena cinque lettere del Co. Vincenzo mio fratello, nelle quali si dimostra una tal verità. Per la qual cosa data le due serie sovrascritte di numeri, e di logaritmi, ci ha da essere un tal valore di B, che soddisfaccia a tutte le equazioni $B^0 = 1$, $B^{\frac{p}{2\sqrt{-1}}} = -\sqrt{-1}$, $B^{\frac{p}{\sqrt{-1}}} = -1$, $B^{\frac{3p}{2\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}$, $B^{\frac{2p}{\sqrt{-1}}} = 1$: ma $1, -\sqrt{-1}, -1, \sqrt{-1}, 1$ formano una continua progressione geometrica; dunque tale sarà altresì la serie $B^0, B^{\frac{p}{2\sqrt{-1}}}, B^{\frac{p}{\sqrt{-1}}}, B^{\frac{3p}{2\sqrt{-1}}}, B^{\frac{2p}{\sqrt{-1}}}$, onde per esempio si abbia $B^0 \cdot B^{\frac{p}{\sqrt{-1}}} = B^{\frac{p}{2\sqrt{-1}}} \cdot B^{\frac{p}{2\sqrt{-1}}}$, e conseguentemente $\frac{p}{\sqrt{-1}} = 2\left(\frac{p}{2\sqrt{-1}}\right)$: ma $\frac{p}{\sqrt{-1}} = l{-1}$, $\frac{p}{2\sqrt{-1}} = l{-\sqrt{-1}}$; dunque $l{-1} = 2\, l{-\sqrt{-1}}$, formula ch'ella crede non ritrovarsi.

Nella logistica curva trascendente non solo la base, ma ancora il sottonumero, i numeri, e i logaritmi sono capaci di infiniti valori.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contavalli · Modena

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

valori. Non così la sottangante, che è quella costante, che avendo unicamente luogo nella equazione differenziale $a\frac{dy}{y} = dx$, non ricava salvoché un solo valore reale. Da ciò ne segue, doversi sempre stare $\frac{dy}{y} : dx$ nella ragione costante di $1 : a$. Il perché le differenziali $\frac{dy}{y}$, dx dovranno essere o ambedue reali, o similmente immaginarie; ed i loro integrali richiederanno tali grandezze, che differenziati, ci diano le flussioni $\frac{dy}{y}$, dx in proporzione di $1 : a$. Le quantità immaginarie sono o semplici, o miste di reale fluente, e di immaginaria costante; o pure di reale costante, e di immaginaria fluente; o pure di reale, e di immaginaria entrambi fluenti. Ad una di queste quattro classi ogni grandezza immaginaria si può ridurre, e sempre generalmente sarà $\frac{dy}{y} : dx :: 1 : a$. Si serva di esempio la equazione $du = \frac{\sqrt{-1}}{2} l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$ e conseguentemente $\frac{2u}{\sqrt{-1}} = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$. Prese le differenze, troveremo $\frac{2du}{\sqrt{-1}} = \frac{2\sqrt{-1}.dz}{-z^2-1}$ ~~purché nel nostro caso a=1 le prodotte differenze esser~~ debbano eguali, dimodoché ne risulti il vero valor ~~di due~~, e ne inferiremo ch' esse sono similmente immaginarie del genere delle semplici, e che i loro integrali spettano a due diverse classi di immaginarj, cioè ~~a du~~ $\frac{2u}{\sqrt{-1}}$ a quella dei semplici,

a

merla così $\sqrt{2ax-x} = Iy$, ancorché chiaro apparisca, che alla stessa assissa x due ordinate rispondono situate contrariamente. I due semicircoli, di cui si serve, non appartengono allo stesso circolo

$\ldots = \frac{2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$ ad una di quelle dei misti di reale, e di immaginario.

Essendo l'esponente della β uguale a $\frac{nu}{\sqrt{-1}}$, spetta esso costantemente alla specie delle quantità semplici immaginarie. E conciossiachè qualunque delle soprascritte equazioni ci dia il medesimo valore di β, scegliamone una ad arbitrio, per esempio grazia $\beta^{\frac{2p}{\sqrt{-1}}} = 1$, e trovando $\beta = 1^{\frac{\sqrt{-1}}{2p}}$, ci accorgeremo eguagliarsi β all'unità alzata ad una potestà immaginaria, il cui esponente appartiene alla classe delle grandezze semplici immaginarie.

Di queste mie riflessioni, ne faccia Ella qual conto che crederà loro dovuto dopo averle sottoposte al giudizioso suo esame, e si degni di riputarmi quale pieno di stima ho l'onore di sottoscrivermi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 12 Marzo 1779

Ill.mo Sig. Petronio Maria Caldani
Roma

Divot.mo Obbl.mo Servit.
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli · Modena

Umil.mo Divot.mo Servit.
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 119

Risponderò brevemente alla ingegnosissima sua dei 21. Febbrajo.

Confessando Ella; che la proporzione geometrica esige l'egualità delle continenze, e che nell'analogia 1 : -1 :: -1 : 1 gli antecedenti egualmente contengono i conseguenti, deve parimente accordare, che i quattro termini della predetta analogia siano geometricamente proporzionali; nulla importando che il primo termine positivo sia maggiore del secondo ch'è negativo, ed al contrario il terzo termine negativo sia minore del quarto ch'è positivo; perchè ciò nulla turba l'eguaglianza delle continenze. L'addotta riflessione sarebbe decisiva, se si trattasse di proporzione aritmetica, la quale ricerca la parità delle differenze. In fatti siccome 1, 1, 1 sono aritmeticamente proporzionali, perchè sono eguali le differenze; così per l'opposto 1, -1, 1 non godono di questa prerogativa, perchè sono disuguali le differenze +2, -2.

Nel circolo le due ordinate, una positiva, e l'altra negativa sono medie proporzionali fra gli stessi segmenti del diametro, ed estraendo la radice dell'equazione $2ax - x^2 = y^2$, deve necessariamente esprimerla così $\sqrt{2ax - x^2} = \pm y$, acciocchè chiaro apparisca, che alla stessa assissa x due ordinate rispondono situate contrariamente. I due semicircoli, di cui si serve, non appartengono allo stesso

circolo

116

$e = \frac{2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$ ad una di quelle dei misti di reale, e di immaginario.

120

circolo, proprietà dal quale si è, che all'assissa negativa corrispondano l'ordinata immaginaria.

Lo stesso dicasi della parabola, la cui equazione $ax = yy$, nella quale ponendo x negativa, le ordinate riescono immaginarie. In essa curva pertanto la ordinata $\pm y$ è media proporzionale fra il parametro a, e la medesima assissa x, e nel seguente modo dee notarsi la radice dell'equazione $\sqrt{ax} = \pm y$ onde si manifesti la natura della curva, che alla medesima assissa x si riferiscano due ordinate con direzione contraria.

Questo è il sincero mio sentimento, e senza più ho l'onore di protestarmi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 19 Marzo 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli
Roma

Umil.mo ed Obbl.mo Servo
Giordano Riccati

121

giunga la risposta alla riputatissima sua del Sig. Marca. Nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la.\left(-\frac{z - a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right)$ moltiplicando il numeratore, e denominatore della frazione per $z + a\sqrt{-1}$, ne risulta $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la\left(-\frac{z^2 - 2az\sqrt{-1} + a^2}{z^2 + a^2}\right)$. Si faccia $u = 90^o$ nel circolo del raggio $= a$, onde per mio avviso esser debba $z = \frac{a}{0}$, ed il numeratore della frazione diverrà $-\frac{a^4}{0 \cdot 0} - \frac{2a^3\sqrt{-1}}{0} + a^2$, e secondo la sua idea esser dovrà immaginario. Alla frattanto rifletta, che $-z^2 - 2az\sqrt{-1}$ sono due superficie, le quali stanno fra loro come $z : 2a\sqrt{-1}$, e nel nostro caso come $\frac{a^2}{0} : 2a\sqrt{-1}$, o sia come $a : 0$, e che per conseguenza la seconda dee trascurarsi in riguardo alla prima. Il moltiplicare una quantità per $\frac{z + a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}} = 1$, non dee turbare quelle conseguenze, che precedentemente si erano fondatamente dedotte.

Per ciò che spetta alla formola $p = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}{\frac{p}{n} - \sqrt{-1}}\right)^n$; ~~mi rimetto a quello, che ho scritto sotto li .. Marzo, e nuovamente affermo, che quantunque n sia infinito relativo, $\frac{p}{n}$ si può trascurare rispettivamente a $\sqrt{-1}$.~~ ~~Il D. Ab. Rossi giudica erroneo~~ quello, ~~che non intende~~

io muovo la frazione $\frac{-\sqrt{-1} - \frac{p}{n}}{-\sqrt{-1} + \frac{p}{n}} = 1 + \frac{2p}{n\sqrt{-1}} = 1 - \frac{2p\sqrt{-1}}{n}$.

Avremo dunque $\frac{2p}{\sqrt{-1}} = l\left(1 + \frac{2p}{n\sqrt{-1}}\right)^n$, o sia $-2p\sqrt{-1} = l\left(1 - \frac{2p\sqrt{-1}}{n}\right)^n$, e ponendo $-2p\sqrt{-1} = y$, $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = x$, ci

si

116

$x = \frac{2 - \sqrt{-1}}{2 - \sqrt{-1}}$ ed una di quelle dei misti di reale, e di immaginario.

122

si presentavano le due equazioni $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, $(1 + \frac{y}{n})^n = x$, che sono quelle, a cui è pervenuto il celebre Eulero, nelle quali può essere x = [illegible]
La mia lettera del sig. Marzo fa vedere i limiti dentro i quali è giusto il metodo del comendato Scrittore.

Il P. Ab. Lorri giudica oscuro quello, che forse non intende almeno compiutamente. Era solito [illegible] Fontana di scrivere le sue Opere colla maggior chiarezza, di cui eran capaci.

Ill.mo Sig. Sig. Pron. Col.mo

Martedì scorso mi pervenne alle mani la gentilissima Lettera di V. S. Ill.ma, ove ho trovata la soluzione di quella difficoltà, che le proposi. Io sono pienamente convinto, e lo stesso per mio parere dirà del Sig. Dottor Cassini. Una sola cosa mi resta a proporle esponendo il suo giudizio. L'integrazione della formola $du = \frac{a\,dz}{a^2+z^2}$ ci dà necessariamente equazione $l\pm1 = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$, ec., cioè il congiungimento dei due logaritmi ±1 e in conseguenza la connessione de' due rami della curva logaritmica, ma ciò sempre supposta la dimostrazione geometrica dedotta dalla quadratura dell'iperbola. Si avrebbe prescindendo da quella dimostrazione, il calcolo nell'ipotesi del logaritmo 1 ci darebbe due equazioni $l1 = 2mp\sqrt{-1}$, $l-1 = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$, e nelle ipotesi del logaritmo -1 darà ancora $l-1 = 2mp\sqrt{-1}$, $l1 = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$ ma non dimostra il necessario congiungimento de' due logaritmi. Questo mi sembra che s'inferisca dall'ingegnosissimo, e dottissimo suo discorso. Una tal riflessione per altro punto non giova all'opinione del Sig. Abate Personi, il qual non saprei cosa mai potesse obiettare fuor che il tralasciamento della costante. Io son prontissimo a fare quanto ella mi suggerisce per prevenire il detto Sig. Abate, ma per ora non è sperabile di poter mettere alla luce le lettere, e le risposte, perchè il tomo 16 del presente giornale è omai per uscire, e sarà forse più degli altri voluminoso. Converrà dunque aspettare il tomo seguente. Intanto V. S. Ill.ma è pregata a dirmi prima, s'Ella desidera che le sue risposte vadano stese in due lettere, o in una sola, poichè al primo della somma=

Pongasi nella sua formola $z = 1$, e avremo $(45^\circ + mp) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} + l(-1)\right)$

per altro piacere d'avere sotto agli occhi le proposte, e le risposte. In qualunque maniera
pregherò di poterle ricevere. Io credo, che possa dirsi con tutta verità, che questa fama prezione è
suscitata dal Sig. Conte Abate Vincenzo, non men che quella delle forze vive, e che dal Sig. ...
fratello è stata liberata dalle opposizioni, che muovevano le di lui forze. [illegible] (la decisione)
avvenga ciò, che avvenne a' tempi della controversia delle forze vive, cioè che non si [illegible]
giustizia a chi la merita, e quel che più è da dolersi, da' medesimi scrittori, che [illegible]
maggior applauso ai paralogismi secondi, che alle dimostrazioni [illegible] del tomo che [illegible]
ed Ella vedrà una risposta, che ho fatta al Sig. Abate Frisi sopra l'accusa data alla [illegible]
Conte Abate Vincenzo intorno al problema del Fermat. Parlo sempre con rispetto, ma [illegible]
di fargli toccar con mano il torto fatto a [illegible] Stampa, e si [illegible] dall'[illegible]
alcune riduzioni. V.S. Ill.ma è supplicata a [illegible] nella sua grazia e [illegible]
di quale altro suo comando, giacchè mi protesto con profondo ossequio

di V.S. Ill.ma

Modena ~~14~~ Marzo 1779

Umiliss.mo e Devot.mo Servitore
Giuseppe Contarelli

[illegible]

Pongasi nella una formola $z = 1$ e avremo $(45^\circ + m) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ [illegible]

5

All'Illmo Sig. Sig. e Pron Colmo
Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

5 Z

Ill.mo e Sig. Sig. P.rone Col.mo

Partita la posta di sabbato passato colla mia ultima lettera mi è sovvenuta immediatamente una risposta, ch'io diedi molti mesi sono al sig. Avvocato Cassiani sul proposito della costante, la quale non so come, mi era uscita affatto di mente. Questa mi parve sì forte, e concludente; ch'io non ho voluto tardare un momento a parteciparla a V.S. Ill.ma, sottoponendola al suo gravissimo giudizio, e disamina.

La costante aggiunta alla sua formola deve essere $l\,a\sqrt{-1} - l\,{-a}\sqrt{-1}$, due sono i suoi valori. L'uno è $l\left(\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}}\right) = l-1$ l'altro $-l\left(\frac{-a\sqrt{-1}}{a\sqrt{-1}}\right) = -l-1$ ricavandosi sempre il medesimo pronunciato 1. Dunque $l-1 = -l-1$, equazione, che non può mai esser vera, se $l-1$ non è $=0$; prima verità, che ne discende aver $l-1$ un valore reale non meno che $l1$: dunque la costante aggiunta $=0$ seconda verità, che parrebbe degna di una difesa a V.S. Ill.ma. Frattanto sospendiamo queste per altre leggerissime conclusioni.

Aggiungo la costante $l-1$ alla sua formola e diviene $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}\right)+l-1\right)$

Facendo $a=1$, $z=0$ sarà $l-1 = 0 \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$ &c.

Per conservare l'analogia, alla formola del sig. Abate Pesenti aggiungo la costante $-la+la = l1$, ed ottengo $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)+l1\right)$, e quindi posta $a=1$, $z=0$ mi si produrrà similmente $l1 = 0 \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$ &c. Dunque finalmente sarà $l\pm1 = mp\sqrt{-1}$

Pongasi nella sua formola $z=1$ ed avremo $(45^\circ + mp) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right) \mp l-1\right)$

ma $l\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right)+l-1=l\sqrt{-1}$; dunque $l\sqrt{-1}=(90^\circ+2mp)\sqrt{-1}$. Pongasi $z=$

e avremo $-45^\circ+mp=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{+1-\sqrt{-1}}{-1+\sqrt{-1}}\right)\right)+l-1$. Dunque $l-\sqrt{-1}=(-90^\circ+2mp)\sqrt{-1}$.

~~$l\sqrt{-1}+l-\sqrt{-1}=$~~ $l-1=(\pm 180^\circ+4mp)\sqrt{-1}$. Procedendo così sulle traccie dell'Eg. Sig.

otterremo $l\pm 1=(4m\pm 1)p\sqrt{-1}$.

Per tal via osservando rigorosamente le leggi delle integrazioni, senza cangiar prontamente [illegible] za ricorrere alla quadratura della Iperbole, si viene a dimostrare anche col solo calcolo [illegible] tà contrastata. Non vedo che il Sig. de Foncenex, ne' alcun altro dell'uno partito possa rifiutare il mio raziocinio. Maneggiando ancora la formola $u\sqrt{-1}=l\left(\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{xx-1}}\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{xx-1}}\right)-l\frac{1}{\sqrt{-1}}$ si giunge alle medesime conclusioni. Sono ansiosissimo di sentire il suo parere venerat[issimo] e perciò la supplico a perdonarmi la mia importunità e a considerarmi sempre qual mi protesto profondissimo ossequio

Di V. S. Ill.ma

Modena 23 Marzo 1779

P.S. Avendo io provato, che la costante è $=\pm l-1$ non credo, che niuno mi possa contrastare l'usar piuttosto il segno +, che il segno −. Nemmeno sono obbligato a fare la riduzione di $l-1+l-1=l1$. Se alla costante si prefigga il segno −, avremo $l1-l1=0$, $l-1-l-1=0$; dunque $0=0,\pm p\sqrt{-1},\pm 2p\sqrt{-1},\pm 3p\sqrt{-1}$ &c. Anche questo dubbio merita discussione.

Umiliss.mo ed Obbl.mo Servitore

Giuseppe Lonzarelli

Molto Rev.do P.re Sig.re Sig.re P.rone Col.mo 129 131

:ino 127

v: Ma

…ngo lo stesso dalla formula del P. Vincenzo $u = \sqrt{-1}.\, l - + =$

$\sqrt{-1}.\, l\left(-a.\, \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{-1}.\, l\left(\sqrt{-a}.\, \sqrt{\frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}}\right)$. Fatta $a = 1$, $z = 0$ abbiamo

$\sqrt{-1}.\, l\left(\sqrt{-1}.\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}.\, l - 1 = \frac{-1}{\sqrt{-1}}\, l - 1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l - 1$. Egli certo

ha omessa la costante

124

57 MODENA

Al Nobile Sig. Sig. e Pron. Col.mo
Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

contro molto volontieri l'occasione di servire V. R. e lo ...simatissimo Sig. D. Giulio Dugnani. Le Opere di mio Padre sono state stampate in Lucca in quattro Tomi in quarto, i tre primi da Jacopo Giusti gli anni 1762. 1764., ed il quarto da Giuseppe Rocchi l'anno 1765. Il loro prezzo era di L 14. Venete per cadauno. Si sono poscia inserite nel Tomo XVI della Nuova Raccolta Calogeriana tre Lettere sopra le Opere De Castellis del Mar.e Poleni con alcune mie Annotazioni pag. 167. ...spedisco presentemente l'indice delle Opere pubblicate dalli Ab. Vincenzo mio Fratello, riserbandomi di inviarla la settimana ventura il catalogo di ciò, che abbiamo stampato il Co. Francesco, ed io. Vedrà notati alcuni prezzi: sarà bene per altro, che si rivolga a Bologna per sapere i prezzi, che corrono al giorno di oggi. Le Instituzioni Analitiche, che si vendevano Paoli 63. ora vagliono P. 70 ...

...sommo piacere, che il Reverend.mo P. Fassan predichi con pieno suo onore, e numeroso concorso in codesta R. I. Cap. di S. Maria della Scala. Anche in Venezia nella Chiesa di S. Zaccaria ha ottenuto moltissimo applauso. Opera del P. M. Vallotti sarà divisa in due Tomi. Nel primo, che ora si stampa, tratta della teorica della Musica, il secondo è riservato per la pratica. Di più non le posso scrivere, sintantochè non si pubblica il primo Tomo.

...mio Trattato di Contrappunto l'ho spedito a Firenze, e quanto

Proprietà elementari delli Equalità; e dalle Proporzioni Aritmetiche, e Geometriche. In Bologna 1759. per Ferdinando Pisarri. Pa. ...

...

La

124

quanto prima se ne intraprenderà l'edizione. Quando ne sarà stabilito il prezzo, la supplicherò a trovarmi con alquanti Associati.

Benchè sia sospesa la continuazione della ristampa dei San Marcelliani, nulladimeno i due Tomi impressi si vendono 22 s. l'uno. Se raccomandassi l'affare ad un mio Amico troverebbe forse occasione di acquistarli a prezzo notabilmente minore.

Ho sentito con pienissimo contento, che dentro l'anno avvenire sarà compiuto il numero di Salmi a principio da Lei disegnato; e pregandola della continuazione de' suoi preziosi comandi; con vera stima, ed ossequio ho l'onore di protestarmi

D. V. R.

Treviso 26. Marzo 1779.

Molto Rev.do D. Giovenale Sacchi Milano

Umil.mo Divot.mo ed Obbl.mo Serv.
Giordano Riccati

Proprietà elementari delle Egualità, e delle Proporzioni Aritmetica, e Geometrica. In Bologna 1759. per Ferdinando Pisarri. Pa: 1. [illegible]

La

124

ra cons

Catalogo delle Opere pubblicate dall' Ab. Co. Vincenzo Riccati.

De Caussa Physica compositionis, ac resolutionis virium. Disquisitio Physico-Mathematica. Bononiae 1744. in 4. ex Typographia S. Thomae Aquinatis. Questa Dissertazione fu inserita nel 2. Volume del 2. Tomo de' Comentarj di Bologna l'anno 1746.

De Centro Aequilibrii Disquisitio Physico-Mathematica. Bononiae 1746. in 4. Typis Ferdinandi Pisarri. É stata ristampata nel Volume 2. del mentovato 2. Tomo de' Comentarj di Bologna, e poscia nel primo Tomo degli Opuscoli corredata di alcune note.

De Velocitate accessus, et recessus a puncto, aut a linea data, et de Hermanni Paralogismo Disquisitio Physico-Mathematica. Bononiae 1747. Typis Ferdinandi Pisarri. In 4.

De Legibus Communicationis Motus inter plura corpora concrescentia, quae a figura corporum non dependent, Disquisitio Physico-Mathematica. Bononiae 1748. Apud Thomam Colli ex Typographia S. Thomae Aquinatis. In 4.

De Principio conjungendo cum Principio Actionis ad determinandas proprietates motus liberi, et curvilinei Disquisitio Physico-Mathematica. Bononiae 1750. Typis Ferdinandi Pisarri. In 4. Questa Dissertazione è stata inserita nel Tomo IV. de' Comentarj di Bologna impresso l'anno 1757. con alcune mutazioni, e coll' aggiunta di una seconda parte sotto il titolo De Motibus liberis, et curvilineis in vacuo.

Proprietà elementari delle Equalità, e delle Proporzioni Aritmetica, e Geometrica. In Bologna 1759. per Ferdinando Pisarri. Pa. 1.

Le

Le seguenti Dissertazioni si leggono nelli Accademia di Bologna, che ha per titolo De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii. Bononiae ex Typographia Laelii a Vulpe.

Tomi secundi pars altera 1746. Vincentii Riccati De caussa Physica compositionis, et resolutionis virium

Tomi secundi pars tertia 1747. Vincentii Riccati Animadversiones in formulam differentialem, in qua indeterminatae ad unicam tantum dimensionem ascendunt. Questa Dissertazione con molte aggiunte è stata trasferita nel secondo Tomo degli Opuscoli.

Vincentii Riccati Animadversiones in fractionem, cujus denominator, et numerator per certam determinationem nihilo aequales fiunt.

Vincentii Riccati De Curva Aequilibrii.

Tomus tertius 1755. Vincentii Riccati De natura et proprietatibus quarumdam curvarum, quae simul cum Tractoria generantur, quaeque proinde Syntractoriae nominabuntur.

Tomus quartus 1757. Vincentii Riccati De Motibus liberis et mixtilineis in vacuo.

Tomi quinti pars prima 1767. Vincentii Riccati ad Franciscum Mariam Zanottum Epistola.

Vincentii Riccati De Termino generali Seriarum Recurrentium cum Appendice.

Vincentii Riccati De Motibus liberis et mixtilineis corporum projectorum, quae se se attrahunt per functionem inextensibilem transeuntem per datum punctum.

Tomi quinti pars altera 1767. Vincentii

Riccati

Riccati De Aequivalentia Potentiarum per principia metaphysica demonstrata.

Vincentii Riccati Epistolae tres, quibus veritas Calculi sinuum, et cosinuum ac infinitesimorum Analysi demonstratur.

Vincentii Riccati Additamentum ad Opusculum de Termino generali Seriarum Recurrentium cum Appendice, quod editum est in hujus Tomi parte prima.

Vincentii Riccati De Corpore projecto, cui praeter potentiam servantem rationem reciprocam duplicatam distantiarum a centro, applicatae sunt aliae potentiae duae, quarum una dirigitur ad idem centrum, altera est huic perpendicularis.

Vincentii Riccati De Quadratura Curvarum tradita per Summas generales Seriarum.

Dialogo di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù dove ne' congressi di più giornate delle forze vive, e dell' Azioni delle forze morte si tien discorso. In Bologna nella Stamperia di Lelio dalla Volpe 1749. In 4. = [illegible]

Vincentii Riccati Soc. Jesu Presbyteri De usu Motus Tractorii in constructione aequationum differentialium Commentarius. Bononiae ex Typographia Laelii a Vulpe 1752. In 4.

Vincentii Riccati Soc. Jesu Opusculorum ad res Physicas, et Mathematicas pertinentium Tomus primus. Bononiae apud Laelium a Vulpe 1757. In 4. Lá 6

Vincentii Riccati Soc. Jesu Opusculorum ad res Physicas, et Mathematicas pertinentium Tomus secundus. Bononiae ex Typographia Sancti Thomae Aquinatis 1762. In 4. Lá 6

Vincentii Della

~~Della Toscana Eloquenza Discorsi cento~~

Vincentii Riccati Presbyteri Societatis Jesu De Seriebus recipientibus Summam generalem algebraicam, aut exponentialem Commentarius. Bononiae 1756. Typis Haeredum Constantini Pisarri, et Jacobi Philippi Primodi. In 4.

Della Toscana Eloquenza Discorsi cento detti in dieci giornate da dieci nobili Giovani in una villereccia adunanza descritti dal Padre Don Salvadore Corticelli Bolognese Prete Professo de' Chierici Regolari di S. Paolo, e Accademico della Crusca. In Bologna. Nella Stamperia di Lelio dalla Volpe. 1752. In 4.

In questa Opera alla pag. 234. si legge una Lettera del P. Riccati, dove si tratta della vera Sentenza del Sig. Giambatista Baliani intorno alla Discesa de' gravi; la qual Lettera tradotta in latino è stata inserita nel primo Tomo degli Opuscoli.

Dissertazione sopra la Proposizione ventesima del Libro primo di Euclide scritta dal P. Tommaso Gabrini Sc. In Pesaro 1752. Nella Stamperia Gavelliana. In 4. Vi si legge una Lettera del P. Vincenzo Riccati. Bologna 5. Maggio 1752.

Nel Tomo X. della Simbola Letteraria pubblicata l'anno 1753. dal Ch. Sig. Proposto Gori vi sono due Lettere del P. Riccati, che hanno questo titolo

Lettera I. del celebre P. Vincenzo Riccati della Comp. di Gesù, nella quale si dimostra, ed amplia un Teorema del Ch. Sig. Giovanni Bernoulli, spettante alla rettificazione delle curve.

Lettera II. del medesimo P. Riccati intorno alla Costruzione di alcune formole senza la Separazione delle Indeterminate.

Nel Tomo III. della Raccolta di Lucca è stampata una Dissertazione, dove per mezzo degli Archi ellittici, ed iperbolici si integra la formola $\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$.
Questa medesima in latino è stata trasportata nel Tomo II. degli Opuscoli.

Nelle Opere del Conte Jacopo Riccati. In Lucca. Appresso Jacopo Giusti sono del nostro Autore.

Tomo I. 1762.

Le Annotazioni al Trattato Della Separazione delle Indeterminate &c. accennate la XI. ch'è del Sig. Co. Ottavio di Sbrogliavacca.

Tomo III. 1764.

L'Annotazione allo Schediasma XXXI. Sopra le Leggi della Resistenza, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi solidi.

Nella Minerva, o sia Nuovo Giornale de' Letterati di Italia Numero XV. Maggio 1763. In Venezia. Presso Domenico Deregni. Articolo XIX.

Estratto del primo Libro del Saggio intorno il Sistema dell'Universo del Conte Jacopo Riccati Nobile Trivigiano stampato nel primo Tomo delle sue Opere in 4. pag. 596. In Lucca 1762. Appresso Jacopo Giusti.

Numero XVII. Luglio 1763. Articolo X.

Estratto del secondo Libro del Saggio intorno il Sistema dell'Universo del Conte Jacopo Riccati &c.

Numero XXIII. Gennaro 1763. M. V. Articolo VI.

Estratto del terzo Libro, e dell'Appendice del Saggio intorno il Sistema dell'Universo del Conte Jacopo Riccati &c.

Numero XXVII. Maggio 1764. Articolo XVII.

Estratto del Trattato della Separazione delle

Indeterminate

Indeterminati nelle equazioni differenziali del primo grado, e della Riduzione delle equazioni differenziali del secondo, e di altre ulteriori contenute nel primo Tomo delle Opere del Sig. Conte Jacopo Riccati stampate in Lucca appresso Jacopo Giusti.

Institutiones Analyticae a Vincentio Riccato Societatis Jesu et Hieronimo Saladino Monacho Coelestino collectae. Bononiae ex Typographia Sancti Thomae Aquinatis. Tomus primus 1765.

Tomi secundi Liber primus 1767.

Liber secundus et tertius.

Nella Nuova Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici. In Venezia. Presso Simone Occhi. si leggono le seguenti Dissertazioni

Tomo XXI. Op. VI.

Lettera del P. Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù al Sig. Conte Giordano suo fratello in Difesa di Giambatista Baliani Cavalier Genovese.

Ivi. Op. XIV.

Esame del Metodo, col quale il Chiarissimo Sig. Edmondo Waring ha pensato di aver ridotte le Equazioni del quinto grado a quelle del terzo, del P. Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù.

× Ivi. Op. XV

Esame del Metodo, col quale il Dottissimo Sig. Edmondo Waring ha giudicato di aver ridotte le Equazioni del sesto grado a quelle del terzo, del P. Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù.

Tomo XXVI. Op. III.

Della Bilancia Dissertazione Meccanica dell' Ab. Conte Vincenzo Riccati. IIV

Raccolta di varj Opuscoli interessanti di più celebri

celebri Autori parte inediti, e parte editi ma rarissimi. Tomo I. Firenze MDCCLXXI. Presso Domenico Marzi, e Compagni.

Lettera di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù al P. D. Girolamo Saladini Monaco Celestino, e Lettore di Geometria, nella quale trattasi della combinazione del moto rotatorio col progressivo. Pà. 5

De' Principj della Meccanica Lettere di Vincenzo Riccati al P. Virgilio Cavina Professore delle Matematiche in Cagliari di Sardegna. In Venezia MDCCLXXII. Nella Stamperia Coleti. Pà. 4

Nella predetta Nuova Raccolta presso Simone Occhi in Venezia Tomo XXVIII. Op. IV.

Del Cuneo Lettera dell' Ab. Co. Vincenzo Riccati al Sig. Arciprete Giambattista Nicolai Prof. di Analisi nello Studio di Padova.

Nella stessa Nuova Raccolta Tomo XXXI.

Intorno alla Scelta delli Ottimo Dissertazione postuma dell' Ab. Co. Vincenzo Riccati

Molto Rev.do Sig.re Sig.re Padrone Colmo 143 5

Ill.mo Sig.re Sig.re Padrone Colmo 139

e stabiliti negativi il protonumero e la base; ne nasce un ramo, in cui ai numeri negativi si riferiscono gli stessi logaritmi, che competono ai numeri eguali positivi, è fuori di ogni quistione. Resta da provare, che i due rami appartengano alla stessa logistica. Si ottiene ciò mediante la quadratura dell'iperbola fra gli assintoti; la quale ci fa toccare con mano, che a due numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo si adatta il medesimo logaritmo. E siccome i due rami dell'iperbola convengono alla stessa curva, non altrimenti spettano ad una sola logaritmica i due rami dei numeri positivi, e negativi. Dopo una sì patente dimostrazione sembrava, che dovessero cessare le dispute; ma la considerazione della formola esponenziale $f\left(\frac{a}{1}\right)^{y} = x$ le ha tornate a riaccendere. In essa formola significano 1 il protonumero, a la base, x il numero, y il logaritmo, e questa costantemente non ci somministra il ramo dei numeri negativi. Nel Tomo XVI del Giornale di Modena si stampano, come le ho scritto, cinque Lettere dell'Ab. Vincenzo mio fratello, alle quali ha aggiunta la sesta. Fa vedere in esse mio fratello, che la base a è fornita di infiniti valori, due reali, e gli altri immaginarj. Se attribuisco ad a il solo valore reale positivo, la premessa formola non ci dà il ramo dei numeri negativi. Nasce questo dall'aggregato di tutti i valori di a, essendoci sempre un valore della

base

base, il quale fa sì, che si abbia $f\left(\frac{e}{g}\right)^{\frac{y}{h}} = \pm x$

Io nella sesta Lettera dimostro questa verità più semplicemente: corrispondendo alla base e il logaritmo f, ed essendo arbitraria la scelta di queste due coordinate, restringe essa siffattamente la formola, che non dobbiamo maravigliarci, se non ne risulta l'intero ramo dei numeri negativi. Alle coordinate e, f dotate d'un solo valore si sostituiscano le due g, h capaci d'infiniti valori relativi, onde si abbia $f\left(\frac{g}{g}\right)^{\frac{y}{h}} = x$. Se voglio trovare il numero x, che corrisponde al logaritmo y, posso sempre scegliere un logaritmo h, che stia ad y come il numero pari n all'impari m; dimodochè sia $\frac{y}{h} = \frac{m}{n}$, e conseguentemente $f\left(\frac{g}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = x$, ovvero $f\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{g}{g}\right)^m} = x$: ma essendo n numero pari, $\sqrt[n]{\left(\frac{g}{g}\right)^m}$ ha due valori uguali uno positivo, e l'altro negativo: dunque $f\left(\frac{g}{g}\right)^{\frac{y}{h}} = f\left(\frac{g}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = f\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{g}{g}\right)^m} = \pm x$. Or ecco dunque che fatta l'opportuna scelta delle coordinate g, h, troverò sempre, che allo stesso logaritmo y si riferiscono due numeri uguali $\pm x$, uno positivo, l'altro negativo; il che &c.

Avremo pertanto $la = l{-a}$, e poichè $2la = la^2$, sarà parimente $2l{-a} = la^2$, e formando i logaritmi 0, $l{-a}$, $2l{-a} = la^2$ una serie aritmetica, i numeri relativi dovranno comporre una serie geometrica 1, a, a^2,

Molto Rendo Rva Sig.re Sig.re Buone Catino

il primo termine si eguaglia al protonumero positivo = 1.
Essendo altresì $l\hat{a} = l{-}a^2$, se ne inferisce $2l{-}a = l{-}a^2$.
I logaritmi 0, $l{-}a$, $2l{-}a = l{-}a^2$ stanno in serie aritmetica; e perciò i numeri relativi hanno da procedere in serie geometrica, che sarà -1, $-a$, $-a^2$, ed avrà necessariamente per primo termine il protonumero = -1.
Dalle cose dette si raccolga rischiarare la natura della logistica, che stabilita l'unità positiva in figura di protonumero, compete una tale prerogativa anche all'unità negativa; il che dalla quadratura della iperbola viene dimostrato patentemente.
quanto ho scritto. Ella faccia quell'uso, che le suggerisca la sua penetrazione, e il suo ingegno, e seguiti a considerarmi quale mi confermo col maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma

Treviso 24 Marzo 1779

Ill.mo Sig.r Savonio M.a
Caldani. Roma.

Divot.mo ed Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

136

142

...copie la promessa della scorsa settimana, e do principio dal ragguaglio di ciò, che ha pubblicato il Co. Francesco mio Fratello

Dissertazione intorno l'Architettura Civile, in cui si dimostrano, e si stabiliscono tutte le possibili simmetrie, e scompartimenti in una figura rettangola ad una sola Nave. Leggasi nel Tomo VIII. in 12.me della N. R. Calogerana. In Venezia. Presso Simone Occhi pag. 437.

...Eravelli intorno a varie nuove teoriche, e metodi pratici per l'Architettura Civile, e specialmente intorno alla altezza interna de' vasi, e alla media proporzionale armonica, da cui dipendono. Pubblicate dall'Anonimo Trivigiano. Con una sua Lettera indirizzata al Signor Cavaliere Cristoforo di Rovero, in cui rispondesi alle tre uscite non ha molto da Brescia. In Treviso MDCCLXIII. Per Giulio Trento. in 4.to

Alla fine del Libro lo Stampatore ha inserito una quinta Lettera del Co. Francesco Riccati, in cui tratta della ~~cui tratta della~~ curva, con le quali si hanno a costruire le volte negli edifizj.

Nel Tomo IV. delle Opere del Conte Jacopo Riccati. In Lucca MDCCLXV. Appresso Giuseppe Rocchi. In 4.to la Prefazione ai Componimenti Poetici pag. 307. è stata scritta dal Co. Francesco.

... Riccati al Chiarissimo Sig. Co. Girolamo Zanaroli, in cui si determina l'equazione generalissima delle Curve bilanciate, ed isocrone. Nel mentovato Giornale Tomo XIV. num. XII. pag. 269.

Risposta

Motivi Storici a favore della Chiesa Cattedrale di Trivigi, e contro la Collegiata di Asolo, Opera Genuina del Co. Jacopo Riccati Nobile Trivigiano. Colle aggiunte di una Prefazione, e di alcune Note. In Bassano MDCCLXIX. Nella Stamperia Remondini. In 4.to La Prefazione l'ha distesa il Co. Francesco.

Inchiuso nella presente troverà V.R. il Catalogo delle Opere da me pubblicate sino al presente. Ella mi continui la sua pregiatissima grazia, e mi consideri quale mi confermo con pienissimo ossequio

Di V.R.

Treviso 12 Aprile 1769

Umil.mo Divot.mo Obbl.mo Servo
Giordano Riccati

Molto Rev.do Sig. D. Giovenale Sacchi. Milano.

Catalogo delle Opere finora pubblicate dal Co. Giordano Riccati.

Supplemento all' elogio del P. D. Ramiro Rampinelli Bresciano &c. stampato nel Giornale di Roma MDCCLIX. Leggesi nelle Nuove Memorie per servire all' Istoria Letteraria. Tomo terzo. In Venezia MDCCLX. appresso Silvestro Marsini in 8.vo pag. 181.

Informazione intorno all' Opera Elementa Geometriae Infinitesimorum Auctore D. Hieronimo Saladini Lucensi &c. Libri tres. Bononiae MDCCLX. ex Typographia S. Thomae Aquinatis. Leggesi nelle Nuove Memorie per servire all' Istoria Letteraria. Tomo quinto. In Venezia MDCCLXI. Appresso Giorgio Fossati in 4.to pag. 273.

Saggio sopra le Leggi del Contrappunto &c. In Castelfranco MDCCLXII. Per Giulio Trento. in 8.vo

Riflessioni sopra la vera origine, e natura della Forza Centrifuga &c. In Lucca MDCCLXIII. Per Giuseppe Rocchi in 12.mo nella Raccolta di Opuscoli.

Determinare le Leggi della Comunicazione del Moto tra i Corpi Molli senza far uso di verun principio, che dai Cartesiani, e dai Leibniziani possa essere contrastato. Dissertazione Fisico-Matematica &c. Nel Tomo XII. della N. R. Calogeriana. In Venezia. Presso Simone Occhi MDCCLXIV. in 12.mo pag. 349.

Nel Tomo III. delle Opere del Co. Jacopo Riccati. In Lucca MDCCLXIV. Appresso Jacopo Giusti in 4.to che contiene XXXIX. Schediasmi Fisico-Matematici, sono del Co. Giordano le tre seguenti scientifiche Annotazioni.

Annotazione allo Schediasma XXIII. Verae, et germanae Virium elasticarum leges ex phaenomenis demonstratae. pag. 239

[illegible] rdano Riccati al Chiarissimo Sig. Co. Girolamo Zanaroli, in cui si determina la equazione generalissima delle Curve bilanciate, ed isocrone. Nel mentovato Giornale Tomo XIV. num. XII. pag. 289.

Risposta

Annotazione alle Schediasma XXVI. Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. pag. 263

Annotazione alle Schediasma XXXVI. Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI. del Libro II. dei Principj Matematici della Filosofia Naturale del Cavalier Isacco Newton. pag. 425.

Delle Corde ovvero Fibre elastiche. Schediasmi Fisico-Matematici &c. In Bologna MDCCLXVII. Nella Stamperia di S. Tommaso di Aquino. in 4.to

Soluzione della Difficoltà proposta dal Dottissimo P. D. Girolamo Saladini Monaco Celestino intorno ad una Proposizione contenuta nell'Opera Delle Corde ovvero Fibre elastiche del Sig. Co. Giordano Riccati Schediasma I. Num. XX cioè, che un peso minore della rigidità naturale di una corda la rompe.

Riflessioni del Sig. Co. Giordano Riccati sopra l'Annotazione alle Schediasma XXXVI. contenuta nel Tomo III. delle Opere del Sig. Co. Jacopo Riccati.

Amendue queste Dissertazioni sono inserite nella N. R. Calogeriana Tomo XIX. In Venezia MDCCLXX. Per Simone Occhi in 12.mo, la prima alla pag. 267., la seconda alla pag. 295.

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Sig. Roberto Zuccareda Nobile Trivigiano Sopra le regole più importanti delle Strutture Architettoniche.

È contenuta questa Lettera nella Raccolta di vari Opuscoli interessanti di più celebri Autori parte inediti, e parte editi ma varissimi. Tomo I. Firenze MDCCLXXI. Presso Domenico Marzi, e Compagni.

Spiegazione di una Esperienza. Nella N. R.

Calogeriana Tomo XXI.

Della maniera di costruire un Rovescio, che ascenda lungo un piano inclinato all'orizzonte. Nella predetta N. R. Tomo XXIII.

Della Figura piana isoperimetra contenente la massima superficie. Nello stesso Tomo XXIII.

Osservazioni sopra la necessità delle Leggi dinamiche. Nella N. R. Tomo XXV.

Che lo studio della Matematica non favorisca la Miscredenza. N. R. Tomo XXVIII.

Parere sopra la Forza Viva. N. R. Tomo XXX.

Del Centro della Percossa. N. R. Tomo XXXI.

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Sig. Arcip. Giambatista Nicolai &c., in cui nuovamente si difende dalla nota di petizion di principio la formola, colla quale il Cav. Newton determina la velocità della propagazione del suono per l'aria. Leggesi nel Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia, che si stampa in Modena, Tomo XII. num.° XI. pag. 320

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Chiarissimo Sig. Co. Girolamo Zanaroli, nella quale si indaga l'artifizio, di cui si serve la Natura per far sì, che incitata una corda al suono, s'adatti in brevissimo tempo ad una Curva bilanciata, ed isocrona. Nel mentovato Giornale Tomo XIII. num.° III. pag. 82.

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Chiarissimo Sig. Co. Girolamo Zanaroli, in cui si determina l'equazione generalissima della Curva bilanciata, ed isocrona. Nel mentovato Giornale Tomo XIV. num. XII. pag. 289.

Risposta

1 3 4 146

Annotazione alle Schediasma XXVI. Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. pag. 163

Annotazione alle Schediasma XXXVI. Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI. [illegible]

1. 4. 4

Risposta alle Riflessioni Analitiche del Sig. Abate Gioacchino Pessuti &c. sopra una lettera scrittagli dal Sig. Abate Co. Vincenzo Riccati, ed inserita ultimamente nella Nuova Raccolta di Opuscoli Scientifici e Filologici stampata in Venezia nell'anno 1776. Nel detto Giornale Tomo XV. num.^vo VI. pag. 144.

Sopra i Logaritmi dei Numeri negativi Lettere cinque del Sig. Co. Ab. Vincenzo Riccati al Sig. Ab. Iacopo Pellizzari &c. ora per la prima volta pubblicate, alle quali se ne aggiunge una del Sig. Co. Giordano Riccati. Nel detto Giornale Tomo XVI. num.^vo VII. pag. 137.

Ill.mo Sig.re Sig.re P.rone Col.mo

Annotazione allo Schediasma XXVI. Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. pag. [illegible]

Annotazione allo Schediasma XXXVI. Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo

[…]mmiratore grandissimo del distinto merito di V. S. Ill.ma da molto tempo desiderava una qualche fortunata opportunità di rassegnarle gli attestati della mia stima, e della mia servitù. Si è questa offerta coll'occasione che il Sig. Ab. Toaldo celebre Prof. di Padova col mezzo di cotesto Librajo Sig. Giuseppe Molini ha trovato un onesto e capace Stampatore, che intraprenderà a suo conto e alle condizioni dal Sig. Ab. Toaldo proposte la stampa della mia Opera sopra le Leggi del Contrappunto in due Tomi in quarto, ed io già ho spedito al Molini il M.S., acciocchè possa esaminarlo e calcolare la spesa. Lo stesso Sig. Ab. ha scritto al Molini ch'io intendo, che l'edizione sia nitida, corretta, e data in un discreto e determinato tempo; e però ch'egli pensi a rendersene responsabile, ed il Molini li ha assicurato, che egli starà sommamente a cuore, ch'io resti pienamente contento. Quello che preme si è che lo Stampatore abbia due Correttori; uno per il dettato, e l'altro per gli esempi musicali, che senza prendersi alcun arbitrio, abbia l'unica mira, che la stampa riesca conforme all'originale. Dico questo, perchè sopra dei Bassi io scrivo spesso dei numeri diversi da quelli, che

s)

[…] Passato, […] [illegible]

sioni $l\left(\frac{a}{a}\right) = l1$, $-l\frac{a}{a} = -l1$. Aggiunta la costante $l1$, si avrà $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)+l1\right)$, e ponendo $a = 1$, $z = 0$ e $u =$ $0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$ &c $= mp$, $l1 = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$ &c[…]

s'usano comunemente, nè vorrei che mi accadesse quel
ch'è successo al Sig. Tartini, che un Maestro ha cangiati
nei Bassi i numeri, credendoli malamente scritti da
Copisti. Se V.S. Ill.ma mi onorerà, come la supplico, di
proteggere questa edizione, e ne parlerà con premura
al Molini, io sono sicurissimo, che una tale raccoman-
dazione otterrà un pienissimo effetto. Le domando
mille scuse pel soverchio coraggio che mi prendo,
contentissimo di avere dedicata la mia servitù,
con profondo rispetto mi sottoscrivo

Di V.S. Ill.ma

a Treviso 2. Aprile 1779

Ill.mo Sig. Ab. Leonardo Ximenes
Firenze

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

'llmà,
nell'(ffo...)
-1, quan
Dalli
$z = 1$
$z = -1$
nel la somma
Dunque
unque
$mp)\sqrt{-1}$.
$l(-1) = -l(-1)$
$l\sqrt{-1} = l_1$.
$mp)\sqrt{-1}$.

...io d'essere, ... , sion. $l\left(\frac{a}{a}\right) = l_1$, $-l\frac{a}{a} = -l_1$. Aggiunta la costante l_2, si avrà $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)+l_1\right)$, e ponendo $a = 1$, $z = 0$, $u =$ $0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$ &c $= mp$, $l_1 = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$ &c

Illmo Sig. Sig. e Pron Colmo 155

Illme Sig.ra Sig.ra Padrona Colmo 151

Molto forte, e conchiudente è la riflessione fatta da V.S. Illma nell'ultima sua dottissima lettera dei 23. Marzo. La costante $l a\sqrt{-1} - l{-}a\sqrt{-1}$, che dovrebbe aggiungersi alla mia formula, ammette le due espressioni $l\left(\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}}\right) = l{-1}$, $-l\left(\frac{-a\sqrt{-1}}{a\sqrt{-1}}\right) = -l{-1}$, rimanendo sempre il medesimo protonumero $= 1$. Il perchè $l{-1} = -l{-1}$, e perciò $2l{-1} = 0$, e conseguentemente $l{-1} = 0$. Nè si dica, che essendo $2l{-1} = l1$, dall'equazione $2l{-1} = 0$ soltanto si deduca $l1 = 0$; imperciocchè la riduzione di $2l{-1}$ a $l1$ si ottiene mediante l'analogia $1 : -1 :: -1 : 1$, ed essendo i numeri $1, -1, 1$ in serie geometrica, i loro logaritmi $l1, l{-1}, l1$ debbono formare una serie aritmetica: ma $l1 = 0$; dunque necessariamente anche $l{-1} = 0$. Quindi ottimamente Ella deduce due verità, che $l{-1}$ ha un valor reale non meno che $l1$, e che trovandosi eguale a nulla la costante aggiunta, io l'ho potuta ommettere lecitamente.

Aggiunge da Lei la costante $l{-1}$ alla mia formula, onde ottenga $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}\right) + l{-1}\right)$, e facendo $a = 1$, $z = 0$, e poichè nell'ipotesi riprende la forma $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot 2l{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot l{-1}$, ne risulta nel caso di $z = 0$ $u = 0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$ &c., $l{-1} = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$ &c. $= mp\sqrt{-1}$ [illegible] costante, che si dovrebbe aggiungere alla formola del Sig. [illegible] Bassuti, cioè $la - la$, ridotta che sia, accetta due espressioni $l\left(\frac{a}{a}\right) = l1$, $-l\frac{a}{a} = -l1$. Aggiunta la costante $l1$, si avrà $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{a + z\sqrt{-1}}{a - z\sqrt{-1}}\right) + l1\right)$, e ponendo $a = 1$, $z = 0$, $u = 0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$ &c $= mp$, $l1 = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$ &c $= mp\sqrt{-1}$

Illma, nell'ipo[...] -1, quan[...] ! Da lei $z = 1$ $z = -1$ nella somma Dunque dunque $mp\sqrt{-1}$. $l{-1} = -l{-1}$, $l\sqrt{-1} = l1$; $mp\sqrt{-1}$. lori

Per la qual cosa dalla due formole del Sig. Ab. Bassuti, e mia si raccoglie $l\pm 1 = m p\sqrt{-1}$:

Pongasi nella mia formola $z=1$, e si avrà $45^\circ + mp =$
$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right)+l{-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$, e perciò $l\sqrt{-1} = (90^\circ + 2mp)\sqrt{-1}$

Fatta $z=-1$, si trova $-45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{-1+\sqrt{-1}}\right)+l{-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l{-\sqrt{-1}}$

e conseguentemente $l{-\sqrt{-1}} = (-90 + 2mp)\sqrt{-1}$. Si inferisca essere $l{-1} = (\pm 180^\circ + 4mp)\sqrt{-1} = (4m \pm 1)p\sqrt{-1}$

Collo stesso metodo dalla formola del Sig. Bassuti ne deduco $l1 = (4m \pm 1)p\sqrt{-1}$, e non $l1 = (4m \pm 1)p\sqrt{-1}$

E quindi le due formole ci daranno $l{-1} = (4m \pm 1)p\sqrt{-1} = \pm p\sqrt{-1},\ \pm 3p\sqrt{-1},\ \pm 5p\sqrt{-1},\ \pm 7p\sqrt{-1}$ &c. Egli è per altro notabile, che la supposizione di $z = \pm 1$ non ci somministra alcun nuovo valore di $l{-1}$, determinando soltanto una parte di quei valori, che si sono già dedotti dalle ipotesi di $z = 0$. Onde dunque ommetteremo l'ipotesi di $z = \pm 1$

Ora vediamo cosa succede usando le costanti $-l{-1}$, $-l1$ nella mia formola, ed in quella del Sig.r Ab. Bassuti.

La mia formola diviene, facendo $a=1$, $z=0$, $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(l{-1} - l{-1})$
ma $l{-1} - l{-1} = l1$, dunque $u = 0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$, &c.
$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{2} l1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\pm 1$ e finalmente $l\pm 1 = 0, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}$, &c. [illegible]

La formola del Sig.r Bassuti prende il seguente aspetto
$u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(l1 - l1) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\pm 1$, ed anch'essa ci dà $l1 = 0$
$\pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}$ &c. come si è ritrovato, usando [illegible]

[illegible]

$\pm p\sqrt{-1}, \pm p\sqrt{-1}$ [illegible] &c. come si è ritrovato usando le costanti [illegible] le costanti $l{-1}$, $l1$.

Fatto nella mia formola primieramente $z=1$, come si vede nella mia precedente lettera, ... $45^{\circ}\pm mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right)-l1\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\sqrt{-1}$, ed indi $(180^{\circ}\pm 4mp)\sqrt{-1} = (4m\pm1)p\sqrt{-1} = l{-1}$; e facendo $z=-1$, si trova $(-180^{\circ}\pm 4mp)\sqrt{-1} = (4m-1)p\sqrt{-1} = l{-1}$, e perciò $l{-1} = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$, come si è scoperto aggiungendo la costante [illegible]

Con un simile discorso dalla formola dell'Ab. Sassuti si ricaverà $l{-1} = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$; e quindi anche supposta la costanti aggiunte $-l{-1}$, $-l1$, io tralascierei la considerazione di $z=\pm1$.

Tenendo adunque la sola ipotesi di $z=0$, ed osservate rigorosamente le leggi delle integrazioni, e senza ricorrere alla quadratura dell'iperbola, Ella è giunta elegantemente a dimostrare col solo calcolo la verità contrastata, e ciò in doppia forma, valendosi delle costanti aggiuntate $\pm l{-1}$, $\pm l1$. La difficoltà, che può nascere dalla riduzione di $l{-1}$ a $\log. 1$, l'ho già sciolta al principio della presente lettera.

Esposta questa sua bella scoperta, potrebbe dirigere una risposta all'Autore anonimo della Risposta, in cui gli significasse di aver compreso il motivo, per cui ha tralasciato di aggiungere alla sua formola la costante; perchè cioè avendo dimostrato col mezzo della quadratura della iperbola fra gli assintoti, che stabilita come proto-numero l'unità positiva, è parimente tale la negativa, e trovandosi, quando $u=0$, $0=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l{-1}$, diviene superflua l'aggiunta della costante. Soggiungerebbe poscia le sue elegantissime osservazioni, che mettendo

[illegible]

in pieno lume la verità della sentenza Bernoulliana, e
lo sbaglio preso dall'Autore, e dall'Ab. Passuti. Anch'
son di opinione, che da molti si seguiterà a pensare come
prima; ma col tempo cancellandosi le prevenzioni,
naturalmente il vero [illegible]

Le porgo i ben dovuti ringraziamenti per la difesa di un
Libretto, che V.S. Ill.ma inserisce nel Tomo XVI. del
Giornale, e desideroso di poterla servire, mi glorio
di essere costantemente [illegible]

Di V.S. Ill.ma

Treviso [illegible] Aprile 1779

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contavalli. Modena

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

Anche a me parve, dopo d'aver chiusa, e spedita la mia ultima lettera a V. S. Illma, che dalle due formule ultimamente si potesse raccogliere $l-1=(4m\pm1)p\sqrt{-1}$ nell'ipotesi di $z=\pm1$, ma ho trovato che l'inversione se deduce $l\pm1=(4m\pm2)p\sqrt{-1}$, quando la considerazione di $z=\pm1$ possa parere superflua per la ragione da lei addotta, ecco come io ragiono. La sua formula mi dà posto $z=1$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l-\sqrt{-1}\pm l-1)=45^\circ+mp$. Quella del Sig. Ab. Pessuti:

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l\sqrt{-1}\pm l1)=45^\circ+mp$. Dunque sommando

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l-\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}\pm l-1\pm l1)=90^\circ+2mp$. Similmente posto $z=-1$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l\sqrt{-1}\pm l-1)=-45^\circ+mp$ dalle sue formule

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l-\sqrt{-1}\pm l1)=-45^\circ+mp$ e quella del Sig. Ab. Pessuti: Dunque la somma

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l-\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}\pm l-1\pm l1)=-90^\circ+2mp$: Dunque

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(l-\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}\pm l-1\pm l1)=\pm90^\circ+2mp$

Ma $l-\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}\pm l-1\pm l1$ = tanto a $2l\sqrt{-1}$, quanto a $2l-\sqrt{-1}$. Dunque

$l-\sqrt{-1}=(\pm90^\circ+2mp)\sqrt{-1}$

$l+\sqrt{-1}=(\pm90^\circ+2mp)\sqrt{-1}$: Dunque $l-1=(\pm180^\circ+4mp)\sqrt{-1}$: Dunque ancora $l-\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}=l1=(\pm180^\circ+4mp)\sqrt{-1}$. Quindi $l\pm1=(\pm180^\circ+4mp)\sqrt{-1}$.

Avrei potuto conchiudere lo stesso più brevemente. $l-1=-l-1$; dunque $\frac{1}{2}l-1=-\frac{1}{2}l-1$. Quindi $l\sqrt{-1}=-l\sqrt{-1}=l\frac{1}{\sqrt{-1}}=l-\sqrt{-1}$. Ma $l\sqrt{-1}+l-\sqrt{-1}=l1$: Dunque $2l\sqrt{-1}=l1$: Dunque $2l\sqrt{-1}=l-1=l1=(\pm180^\circ+4mp)\sqrt{-1}$ e quindi $l\pm1=(\pm180^\circ+4mp)\sqrt{-1}$.

qualunque sia l'immaginario o semplice, o misto; potendo benissimo due sta

Ho voluto aggiungere tutto questo non perchè sia necessario ma per torvi ogni scrupolo anche s… venire agli opposti

Volendosi esprimere l'arco pel suo seno = x ho trovato sussistere le seguenti formule

$$u\sqrt{-1} = \int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}} = L^{\pm}\left(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}\right)$$

$$u\sqrt{-1} = \int \frac{-dx}{\sqrt{xx-1}} = L^{\pm}\left(x-\sqrt{xx-1}\right) = L^{\pm}\left(\frac{1}{x+\sqrt{xx-1}}\right)$$ e dalle quali formule si ricavano

le medesime verità.

Spedirò la lettera all'autore anonimo delle Riflessioni secondo il suo suggerimento [illegible]

e darassi alle stampe a tempo opportuno, durante la [illegible] considerazioni [illegible]

Intanto

D.V.S. Ill.ma

Modena 6 Aprile 1779

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giuseppe Cantarelli

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe [illegible]
Cantarelli. Modena

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

qualunque sia l'immaginazione o semplice, o misto; potendo benissimo due sta

MODENA

5

8

Al Nob.e Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

2

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe [illegible] Cantarelli. Modena

Umil.mo Divot.mo Servitor Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo 159 1613 169

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo 157

Non altro per ora in risposta alle due ultime pregiatissime di V.S. Ill.ma intorno ad alcune mie opinioni sulla teoria de' logaritmi, che i miei più distinti, ed ossequiosi ringraziamenti. In altro tempo, e quando avrò terminato il trattatello, a cui ho dato mano per mio studio in quei pochi momenti d'ozio, che si possono procacciarmi; e per rischiarare il modo di calcolare i logaritmi, si dice non può negarsi, che s'incontrano ostacoli grandissimi, le scriverò, e la pregherò di onorarmi del veneratissimo di lei sentimento.

Vera cosa è per me, che si ricorra alla formula $p\sqrt{-1} = L-1$, per provare che $L-1$ è quantità immaginaria. È formula; onde si trae questa equazione, uno per me dubbioso perciò, che ho detto in passato non potendosi prendere $l = 0\sqrt{-1}$. Io annovero questa fra le proposizioni evidenti, come già appare, che non sia in nostro arbitrio di prendere il zero positivo, o negativo in una data formula. Le curve asintotiche potrebbero aver asintoti da quella parte, che più piacesse di sù, di giù.

Non dubito, che la base logaritmica, e il potnumerico sieno capaci d'infiniti valori; e per conseguenza anche i numeri, e i logaritmi, che se ne deducono: non dubito, che qualunque sia il numero, e il logaritmo corrispondente, debba esser sempre $\frac{dy}{y} : dx :: 1 : a$, e però $Ly : x :: 1 : a$; ma quindi ricavo, che se x sarà immaginario, lo sarà pure Ly, e se sarà reale, lo sarà ancora Ly, e viceversa, qualunque sia l'immaginario o semplice, o misto; potendo benissimo due quan

immaginarie con fra loro una ragion data qualunque. Non veggo per[…]
che ad un numero reale possa corrispondere un logaritmo immaginar[…]
nè all'incontrario, come la proprietà istessa di Ly : x :: 1 : a chiar[…]
lo manifesta. Una delle due dee accadere; o che le variabili sien[…]
ambedue immaginarie, o ambedue reali; affinche la d.a proprietà
sussista.

E quindi resta evidente; che non in tutti i casi la somma de' loga[…]
dei divisori di una data qtà può uguagliare il logaritmo del prod[…]
di essi, come si ricava dalla natura delle serie, dalle quali p[…]
dirsi forse senza temerità, che la logaritmica ricava il suo es[…]
E così non è vero, che possa farsi $4\,La\sqrt{-1} = La\sqrt{-1}^{4}$ in una medesi[…]
logaritmica. Di ciò per altro parlerò; come ho accennato nel mio[…]
che moltissime cose potrebbe in se racchiudere, e in cui ho prefisso[…]
esaminare, se mi verrà fatto bene, la formula $x^y = a$, dalla qu[…]
appunto dipende tutta la varietà della base, de' numeri, de' logarit[…]
che ella accenna.

Perdoni la noja. Mi continui l'onore della pregiatissima sua grazia, e
pieno d'infiniti obblighi con tutto l'ossequio mi protesto

Di V.S. Illma

Roma 14 Aple 1779

Umiò, ed Obblmo […]
Petronio mo […]

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo

159 1613

169

per
mos
qu
ri n
ni,
appi
men
supp
mese
aglı
aver
di

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Mi apporta sommo piacere la gent.ma sua dei 5 Feb.o per sentire dalla medesima che differenti soggetti si sieno mossi à rispondere allo scritto dell'Abate Cossuti contra suo tratello rapporto alla questione dei logaritmi dei numeri negativi. Molto ingegnose mi sono sembrate le riflessioni che Ell. ha fatte à questo proposito, e sommamente le approvo. Adunque meco rallegro seco, e spero che igualmente gradiranno i Geometri queste sue nuove produzioni, suppongo che Ella avrà letto nel Giornale dei Savj di Parigi del mese di Feb.o p.p. le nuove scoperte Astronomiche dell'Astronomo di Manheim le quali aprono un nuovo campo immenso agli Astronomi.

Già è terminata la stampa della Geometria, dove mi sembra di aver fatto vedere chiaramente il vero Sistema delle proporzioni di Euclide, e che il vecchio metodo dell'Esaustioni è lo stesso [illegible]

[illegible] dei Sangi dalla Capitale per un affare di Confinazione tra il Granducato, ed il Principato di Piombino. Ritornando però a Pisa nel mese di Maggio, mi prenderò la premura di invitarlo a [illegible] Detto Meli, il quale da me è ben conosciuto. Coccor-

che quello Newtoniano delle Ragioni prime e ultime, p[…]
ne questo sia più breve dell'altro per la ragione dei Lem[…]
generali che ci sono anteposti. A questo proposito ha[…]
che non posso vedere come Newton può dedurre la de[…]
mostrazione della prima parte del Lemma V (vale a dire[…]
similium figurarum latera omnia, quae sibi mutuo respon[…]
sunt proporcionalia tam curvilinea, quam rectilinea)
~~mentre la di~~ dai Lemmi antecedenti, mentre tale di[…]
mostrazione deve essere fondata in che le corde eva[…]
nescenti coincidino con li archi, lo che anteriormente
ha dimostrato, e dopo dimostra con l'ajuto di que[…]
Lemma.

Desidero che Ella si conservi in buona salute, e mi […]
costantemente.

Di V. Ill.ma — Segovia 15 Aprile 177[…]

Aff.mo Serv[…]
Pietro Gian[…]

1613

1619

…ia, come
… indica…
…ndo a=
…o, l som…

… Diri=

1.61

Illmo mio
memoria di
… Jaz=
…za
di nro
… stima;

dimento
…zione
… Le
…

…ritrovo però lungi dalla Capitale per affare
di Confinazione tra il Granducato, ed il Prin=
cipato di Piombino. Ritornando però a Pi=
sa nel mese di Maggio, mi piglierò la
premura per invigilare sopra il detto Medi=
co, il quale da me è ben conosciuto. La cor=

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Treviso

Sig. Ab. Sig.re e Padrone Riv.mo 1613

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo. 1.61

Il foglio gentiliss.mo di V. S. Ill.ma mi eccita nella mia mente la dolce memoria di tutta la Famiglia Riccati, che può dirsi la Famiglia dei Bernulli Italiani. Cara è questa Famiglia e dolorosa la rimembranza del n.ro Padre Vincenzo, tanto da me conosciuto, e stimato in Roma, ed in Bologna.

Perciò ricevo con particolarissimo gradimento le pregiate Sue commissioni intorno all'edizione che si farà in Firenze della sua opera sopra le leggi del Contrapunto in due Tomi per mezzo del Sig.r Giuseppe Molini. Presentemente io mi trovo ben lungi dalla Capitale per un affare di Confinazione tra il Granducato, ed il Principato di Piombino. Ritornando però a Firenze nel mese di Maggio, mi piglierò tal premura per invigilare sopra il detto Molini, il quale da me è ben conosciuto. Concor-

162

regione di questa stampa è molto difficile,
ed io più di una volta ho provato, che nelle
materie di profonda scienza l'unico reviso-
re capace è l'Autore medesimo. Pure tro-
vandosi i revisori, come dice V.S. Illma po-
trebbe essere, che questa volta riuscisse.
Io coopererò nella miglior maniera pos-
sibile, che non accadano sconcerti, e che
il Mulini stia al patto già stabilito. Ma
farò un pregio di servirla in questa sua
incombenza, col desiderio di obbedirla in
cose di premura maggiore, mentre con
ogni perfetto ossequio, e servitù mi dico
Di V.S. Illma Castiglione, 16. Aple 1729

All'Illmo Sig.r Conte
Giordano Riccati
Treviso.

Devotiss.mo ed Obbl.mo Servo
Leonardo Ximenes

Sig. Ab. Sig.re e P.rone Riv.mo 1673

33

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo
Il Sig.r Giordano Riccati

7

Treviso

Sig. Ab. Sig.ra e Prone Rmo 1673

avvisa il Sig. Prof. Ab. Toaldo di non aver ricevuto alcun riscontro dalla consegna del mio M.S. al Sig. Giuseppe Molini. Se dunque Ella in questa settimana non ha risposta dal Sig. Ab. Bannizzoni, la supplico a scrivergli nuovamente di far tenere il M.S. al Sig. Molini, facendosi fare la ricevuta. L'ingresso nei Filippini non dovrebbe impedire una faccenda, che in brevissimo tempo si compie, ed io averei premura, che quanto prima si dasse principio all'edizione.

Non essermi per anche capitata la risposta dal Sig. Ab. Ximenes, mi fa credere, ch'egli sia assente da Firenze. Starò in attenzione s'essa mi giunga venerdì prossimo, e rinnovandole gli attestati della mia divozione ho l'onore di protestarmi

Di Lei Sig. Ab. Prone Rmo

Treviso 26. Aprile 1779

Illmo Sig. Ab. Matteo Luigi Canonici. Venezia.

Divotmo Obblmo Servitore
Giordano Riccati

S. Ben.

Dev.mo Obbl.o Ser.e V.o
Matteo Luigi Canonici

1 6 9

...ne, come
...o vediamo
...ando a=1
...o, è somm...

...o divi=
... ad=1 =
...la quale
... ma
...into mi...
...e vi den=
... = $\frac{-0}{0}$.
..., la
... ad $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$
... eguale
... risulta
...angente
...in arche
...ed $\frac{a^2}{0}$ ta...
...into, che
... tangen=
...gente
...con la
...fetto pa...
...ndo lim=
... indeter=
...o tangen...
...tto con
... la tan=
... è im=
...drante.
...ato mez...
...gente
...n la se...
...è quanto
... quindi
...ente in=

... a: sarà
... = a:b,
...i porrò
...ti de
...valori
... ma tan=

S. Bene.

Dev.mo Obbl.mo Serv.e Vero
Matteo Luigi Canonici

33

Preg.mo ed Ornatiss.o S.r Ab.e 167 169

Nob. Sig.r Conte Sig.r Pron. Col.mo 165

[illegible] questo Ord.o mi lusingo ch'ella avrà ricevuto il [illegible]spirato riscontro; intanto io a di Lei quiete le accludo [illegible] lett.a ricev.a jeri dallo Speditore di Firenze, il q.te esat.[illegible]m.te m'informa d.a consegna già fatta. Spiacemi [illegible]n aver persona in Firenze, a cui poter raccomandare [illegible] stampa che troppo giustam.te la interessa. Ximenes [illegible]reccarebbe ad onore il servirla, se le sue commi[ssio]ni [illegible]n lo tenessero quasi tutto l'anno fuori d.a capitale. [illegible] posso io alcuna cosa a di Lei servigio mi comandi [illegible]n libertà, e mi creda per vera stima, e sinceris.a riconos.za

Di Lei Nob. Sig.r Conte

Ven.a p.o Mag.o 79

J. Ben.

Dev.mo Obbl.o Ser.e V.ro

Matteo Luigi Canonici

1661

Preg.mo ed Osservatiss.o S.r Ab.e

Il ... non l'Ab.e Pannizzoni

...ente, come
...o indica
...endo a=1
...o, e sosti
...e divi=
...ad=1=
...la quale
...; ma
...ente ri=
...ti diven=
$= \frac{0}{0}$.
..., la
... ad $\frac{ax}{\sqrt{a^2x}}$
...gua la
...d rivolt
...angente
...n anche
...o $\frac{a^2}{0}$ va
...ente, che
tangen=
...nte
con la
...fetto pa=
...ndo im=
indever=
...o tangen=
...te con
la tan=
..., è im=
...drante
...nte mag=
...gente
...n la se=
...o quanto
...; quindi
...ente in
... a: sarà
...= a:b,
...ri ponà
... de
...valori
...ssa tan=

Al Nob: Sig:re Sig: Pron Col.mo

Il Sig: Conte Giordano Riccati

Treviso

Preg.mo ed Ornatiss.o S.r Ab.e

[Ques]to Pacchetto Manuscritti per l'Ab.e Pannizzoni fu rilevato dalla Dogana, e consegnatosi dall'Amico mio al S.r Giuseppe Molini contro ricevuta, e franco d'ogni spesa. Tanto per sua quiete, e sicurezza, e qui colla brama sempre viva de' stimatiss.i di Lei Comandi, mi rassegno con la solita distinta stima.

Di Lei Preg.o S.r Ab.e

Bol.a 24: Aprile 1779.

Dev.mo Obbl.mo Servitore
Camillo Businari

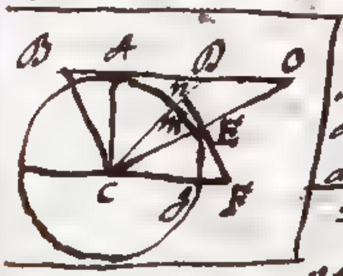
S.r Ab. Canonici / Venezia /

...rà anche $z = \frac{ab}{n}$. Divenendo z, ζ tangenti de' quadranti porrà $= \frac{a^2}{0}$, $\zeta = \frac{ab}{0}$; onde con ciò saran essere le tangenti de' quadranti come i raggi. Rifletto però, che i due valori $\frac{a^2}{n}$, $\frac{ab}{n}$ devono sempre eguagliarsi esprimendo la stessa tan=

[D]alla sua pregiatissima in data 16: Febraro: intendo bene, come
[e] in qual senso esprima la tangente z per $\frac{a^2}{n}$, o per $\frac{a}{n}$: onde in ciò
[n]on occorre altro, se non che il rifletterò, che non essendo $a=1$
[l]a formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{-az-a^2\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ suppone il protonumero, e som[m]a-
[me]nte non eguale ad uno, ma bensì eguale ad a.
[Co]ncedo esser vera l'equazione $-a^2-a\sqrt{-1}\cdot 0 = -a^2$: ma divi-
[de]ndo il tutto per nulla, non accordo essere $\frac{-a^2}{0}-a\sqrt{-1}=$
[$-\frac{a^2}{0}$]; ma bensì accordo essere $\frac{-a^2}{0}-\frac{a\sqrt{-1}\cdot 0}{0}=-\frac{a^2}{0}$; nella quale
[e]quazione; $\frac{-a\sqrt{-1}\cdot 0}{0}$ non accordo essere eguale a $-a\sqrt{-1}$; ma
bensì eguale ad zero. Anche lo stimatissimo Sig. Conte mi
accorderà l'equazione $-0-a\sqrt{-1}\cdot 0=-0$: ma pure dividen-
do il tutto per nulla non mi accorderà $\frac{-0}{0}-a\sqrt{-1}=\frac{-0}{0}$.
[Es]sendo a il raggio, x il seno d'un arco qualunque, la
[t]angente di questo arco si trova sicuramente eguale ad $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
[Si] dimostra poi essere la tangente del quadrante eguale
[a] $\frac{a^2}{0}$; si pone $\sqrt{a^2-x^2}=y$ quantità infinitesima onde ne risulta
[la] tangente infinita $\frac{a^2}{y}$; quindi osservando essere $\frac{a^2}{y}$ tangente
[no]n del quadrante accurato, ma del quadrante, meno un archetto
infinitesimo, fa decrescere la y fino al zero per avere $\frac{a^2}{0}$ tan-
gente del quadrante perfetto. Rifletto però il Sig. Conte, che
[a] parlare rigorosamente il perfetto quadrante non ha tangen-
[te] determinata; mentre la determinazione della tangente
[di]pende dal possibile concorso della stessa tangente con la
[se]cante; ed siccome nel perfetto quadrante si ha il perfetto pa-
rallelismo della tangente con la secante; quindi essendo im-
possibile il concorso di queste due linee, la tangente è indeter-
minata. Il dire dunque $\frac{a^2}{y}$ è tangente minore della tangen-
te del perfetto quadrante non ha senso veruno; mentre con
ciò si suppone, che il perfetto quadrante abbia anche la tan-
gente determinata dal concorso con la secante: il che è im-
possibile. In tanto adunque si dice avere il quadrante
una tangente infinita, perchè realmente il quadrante meno
un archetto quanto uno vole infinitesimo ha per tangente
una linea, quale dopo un infinito spazio concorre con la se-
cante: or siccome poi il quadrante meno un archetto quanto
uno vole infinitesimo non diferisce dal quadrante: quindi
in questo senso si attribuisce al quadrante una tangente in-
finita.
Siano le tangenti Z, z le cotangenti N, n i raggi b, a: sarà
come mi accorda $z=\frac{a^2}{n}$, $Z=\frac{b^2}{N}$. Di più essendo $n : N = a : b$,
sarà anche $Z=\frac{ab}{n}$. Divenendo z, Z tangenti de quadranti pone
$z=\frac{a^2}{0}$, $Z=\frac{ab}{0}$; onde con ciò salva essere le tangenti de
quadranti come i raggi. Rifletto però, che i due valori
$\frac{b^2}{N}$, $\frac{ab}{n}$ devono sempre egualiarsi esprimendo la stessa tan-

gente z. Se N, n sono quantità minime quanto uno vole, sarà sempre $\frac{b^2}{N} = \frac{ab}{n}$: ma se N, n siano zero dovrà secondo i suoi principii $\frac{b^2}{0}, \frac{ab}{0}$ esprimere la tangente istessa del quadrante: benchè $\frac{b^2}{0}$ non sia eguale ad $\frac{ab}{0}$. Ma l'essere costantemente $\frac{b^2}{N} = \frac{ab}{n}$ fatti minimi quanto uno vole i valori di N, n, e cessare l'eguaglianza fatti N, n zero donde mai puole procedere? Torno a ripetere l'Analisi è la scienza delle quantità e non de' zeri.

Supposta la costruzione descritta nella mia lettera

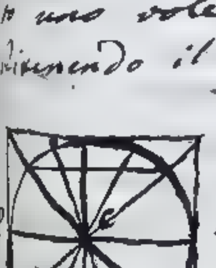


e fatto $AC=a$, $AD=b$, $En=d$, $EF=AB=x$ per la somiglianza de' triangoli CnF, CDO si dimostrerà con facilità essere $x = \frac{a^2-bd}{b+d}$ onde essendo $AO=\frac{a^2}{x}$ sarà ancora $AO = \frac{a^2}{\frac{a^2-bd}{b+d}} = \frac{a^2b+a^2d}{a^2-db}$. Sia minimo quanto uno vole il valore di x sempre si verificherà essere $AO = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2b+a^2d}{a^2-db}$. Come adunque è lecito a lei di lungo il dire essere AO tangente del quadrante allorchè la sottangente x diviene eguale a zero; così a me sarà lecito il dire essere AO tangente del quadrante, allorchè nella formola $\frac{a^2b+a^2d}{a^2-db}$, db diviene eguale a a^2. Io non nego che facendosi $AO = \frac{a^2}{\frac{a^2-db}{b+d}}$; se x quale si trova eguale ad $\frac{a^2-db}{b+d}$ si fa zero sarà $\frac{a^2-db}{b+d}=0$ onde $AO=\frac{a^2}{0}$; dico però che siccome $\frac{a^2}{\frac{a^2-db}{b+d}}$ è indispensabilmente eguale ad $\frac{a^2b+a^2d}{a^2-db}$; sia pure minimo quanto uno vole il valore di x; se diventa zero sarà ancora la tangente del quadrante $AO = \frac{a^2b+a^2d}{a^2-db} = \frac{a^2b+a^2d}{0}$. Ma si dirà le formole $\frac{a^2}{0}$, e $\frac{a^2b+a^2d}{0}$ non compariscono insieme? Ma questo è appunto ciò, che intendo di dimostrare: mentre ciò evidentemente dimostra, che il solo maneggio de' zeri fa divenire diverse le espressioni della istessa quantità, il che non può far mai una quantità per quanto uno vola minima. La ragione adoperata dal Chiarissimo Conte per dimostrare che la formola $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$ puole convertirsi in $\frac{a^2}{0}$ puole egualmente applicarsi alla formola $\frac{a^2b+a^2d}{a^2-db}$. Sia $En=d$ tangente non del arco mg compimento del quadrante; ma di un arco di una infinitesima minore di mg sarà $\frac{a^2b+a^2d}{a^2-db}$ tangente di un arco minore di una infinitesima del perfetto quadrante. Seguiti l'archetto infinitesimo a decrescere, così che $En=d$ sempre più si accosti alla tangente del quadrante meno l'arco Am; ovvero più si accosti alla tangente dell'arco mg e si aumenterà

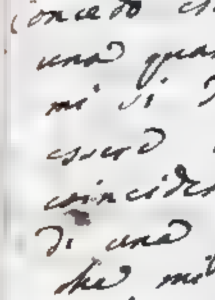
più la tangente, spettando per altro ad un arco minore del quadrante, fintanto che non sia divenuta $tx = d$ tangente dell'arco mg, nel qual caso divenendo $db = a^2$ sarà la tangente del quadrante uguale $\frac{a^2b + a^2d}{0}$. Siami permesso applicare il raziocinio del Sig.r Conte ad altro caso. Fatto il raggio uguale all'unità, sarà l'arco $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$. Si dica p il compimento del arco u al semicircolo, sarà per la regola di proporzione $p = \frac{p\sqrt{-1}}{u \cdot 2} l \frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$; onde $2p = \frac{p\sqrt{-1}}{u} l \frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$ quindi $2p\sqrt{-1} = \frac{-p}{u} l \frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$; $= \frac{p}{u} l \frac{z-\sqrt{-1}}{-z-\sqrt{-1}}$; e $-2p\sqrt{-1} = \frac{p}{u} l \frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$; decresca u, e sempre più l'arco p si accosterà al semicircolo; ma non si avrà il semicircolo perfetto, se non quando u sia zero. In caso dunque di $p = 180^\circ$ mi deve il Sig.r Conte in rigore del suo raziocinio accordare essere $2p\sqrt{-1} = \frac{p}{0} l 1$; $-2p\sqrt{-1} = \frac{p}{0} l 1$; ovvero $\pm 2p\sqrt{-1} = \frac{p}{0} l 1$. Se l'equazione $\pm 2p\sqrt{-1} = \frac{p}{0} l 1$ è vera, sarà anche vero $\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = \frac{p\lambda}{0} l 1$: intendendo per λ qualunque numero intero positivo, o negativo. Non si può più potere dall'equazione $\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = \frac{p\lambda}{0} l 1$ dedurre il sentimento di Eulero, con dire essendo $\frac{p\lambda}{0} l 1 = l 1$ sarà come vole Eulero, ed anche il Sig.r Conte $\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = l 1$: mentre se l'equazione $\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = \frac{p\lambda}{0} l 1$ è vera, sarà anche vero $\pm 2\lambda\sqrt{-1} = \frac{1}{0} l 1 = l 1$: sarà anche vero $\frac{\pm 2p\sqrt{-1}}{\lambda} = \frac{p}{0 \cdot \lambda} l 1 = l 1$; cose tutte aliene dal sentimento di Eulero, e del Sig.r Conte. Tutte queste cose mi si devono necessariamente concedere, se al raziocinio adoperato dal Sig.r Conte per esprimere la tangente del quadrante se si voglia dare forza di dimostrazione.

L'argomento per dimostrare essere $\frac{0}{0} = 1$ ridotto alla più stretta forma silogistica si riduce al seguente. Una linea nella quale, l'abcissa $\pm n$ l'ordinata $\frac{\pm n}{\pm n}$ deve avere per ordinata il valore costante $= 1$: ma la legge di continuità esige che fatta $\pm n = 0$ sia l'ordinata $= 1$: dunque $\frac{0}{0} = 1$. A questo argomento rispondo distinguendo la maggiore. Una linea nella quale l'ascissa $\pm n$ l'ordinata $\frac{\pm n}{\pm n}$ deve avere per ordinata il valore costante $= 1$ essendo n quantità quanto uno vole minima concedo, essendo n zero nego.

Ritenendo il suo modo di dire dal punto C tiro le linee CM, CJ così che il circolo descritto con il diametro NQ sia al corrispondente circolo descritto con il diametro oi come $1 : n$; onde sarà costantemente la fascia della larghezza GN divisa per il corrispondente circolo del diametro $oi = \frac{1}{n}$. Per la legge adunque di continuità nel sito P la fascia divisa per il circolo relativo dovrà essere $= \frac{1}{n}$: ma nel detto sito, tanto la fascia, quanto il



circolo sono eguali a nulla: dunque $\frac{0}{0}=\frac{1}{n}$. Ora domando come è possibile, che la stessa fascia zero nel punto P, divisa per lo circolo nel punto C, quale sia costantemente per lo diametro lo stesso zero possa dare un quoto qualunque quale è $\frac{1}{n}$; esprimendo un numero qualunque minore dell'unità? Così essendo $n=\frac{1}{4}$ è possibile, che la fascia zero nel punto P sia al circolo nel punto C come 4 ad 1. Questo io mai potrò concepire, mi si conceda, che un zero possa essere quadruplo di un altro. Concedo essere nella Parabola $\frac{dx}{dy}=\frac{rx+\frac{ydy}{a}}{y}$; ma siccome $\frac{ydy}{a}$ è una quantità rispetto a rx evanescente, quindi intendo che mi si debba ancora concedere essere $\frac{dx}{dy}=\frac{rx}{y}$. Così conosco essere $rx+\frac{ydy}{a}$ sottosecante; ma nel tempo istesso la intendo coincidente con la sottangente, perchè differente da questa di una quantità evanescente quale è $\frac{ydy}{a}$. Nè io intendo che mi si concedano queste eguaglianze per approssimazione, ma bensì con tutto il rigore geometrico. Per quadrare a motivo di esempio la Parabola fatta $AB=x$, $BE=y$ si considera scorrere la semiordinata BE nel luogo infinitamente vicino cd; fatto il quale



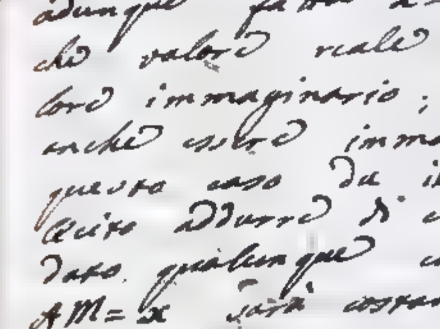
scorrimento si dice essere cresciuta l'area parabolica di un incremento espresso per ydx, benchè il vero incremento sia ydx + il triangoletto Efd: ma siccome questo triangoletto è evanescente, rispetto all'area ydx, quindi l'incremento dell'area Parabolica si dice essere il solo rettangolo ydx. Per ciò non ostante, trascurando questo triangoletto si ha l'esattezza geometrica. Di fatti nella Parabola essendo $px=y^2$ sarà $pdx=2ydy$ onde $dx=\frac{2ydy}{p}$ e però $ydx=\frac{2y^2dy}{p}$, ed integrando l'area Parabolica $BAE=\frac{2y^3}{3p}=\frac{2yx}{3}$ come realmente è geometricamente la dimostrò il primo Archimede, come si rileva dalla lettera scritta al Dositeo. Similmente per rettificare una curva qualunque nel triangoletto EFd rettangolo essendo dx^2+dy^2 eguale al quadrato della sottendente, l'archetto infinitesimo Ed, si dice essere $\sqrt{dx^2+dy^2}$ questa sottendente alla corda sottendente l'archetto infinitesimo Ed, ed eguale ancora allo stesso archetto Ed; essendo la differenza dell'archetto, e della corda evanescente. Se adunque trascurandosi una quantità evanescente, e facendosi l'incremento d'una curva nella sua quadratura eguale solamente ad ydx, si trova l'esattezza geometrica, e non per approssimazione; se similmente trascurandosi una quantità evanescente si fa $\sqrt{dx^2+dy^2}$ = all'archetto Ed, e si trova l'esattezza geometrica nel rettificare una curva qualunque: perchè mi si vorrà contrastare, che essendo $\frac{dx}{dy}=\frac{rx+\frac{ydy}{a}}{y}=\frac{ry+dy}{a}$ trascuratasi $\frac{dy}{a}$ quantità evanescente, non debba anche essere $\frac{dx}{dy}=\frac{rx}{y}$, non per approssimazione, ma con tutta l'esattezza geometrica? Scrive Newton nel suo opuscolo sopra il metodo delle flussioni, e serie infinite (Prob. IV) per determinare le tangenti nelle curve dice: Cape DB ad BE in ea ratione in qua fluxio ipsius AB est ad fluxionem BE, et acta DE curvam tanget in puncto E. Secondo Newton le flussioni di AB, e di BE non sono zeri, ma i primi incrementi, o quantità evanescenti: in questo luogo dunque

…ndo il Chia: Sig.r Conte prendere Newton la linea BD ∯ approssima= …e eguale alla sottangente; ma non con esattezza geometrica. …gio però che supposto vero il metodo delle flussioni si puole dimostrare essere nella Parabola $\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{y}$; essendo dx, e dy non … ma quantità evanescenti. E' nella Parabola $px=y^2$: dunque … il metodo delle flussioni sarà $pdx=2ydy$; onde $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}$: … nella Parabola è $2y:p=2x:y$ dunque sarà $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}=\frac{2x}{y}$. Ma il Sig.r Conte dice essendo nella Parabola $dx:dy=2x+\frac{dy^2}{a}:y$ si avvicina una tal ragione sempre più a quella $2x:y$ a misura, che decresce la flussione dy, dunque svanendo $dy=0$ sarà $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}=\frac{2x}{y}$. Vediamo dove ci possa condurre una tal conseguenza. Scorra la semiordinata BE nel luogo infinitamente vicino cd sarà $Ac=x+dx$ e $cd=y+dy$ onde ∯ la natura della curva, essendo p il parametro, sarà $px+pdx=y^2+2ydy+dy^2$: onde sottraendo gli eguali px ed y^2, sarà con ogni esattezza $pdx=2ydy+dy^2$; onde $\frac{p}{dy}=\frac{2y}{dx}+\frac{dy}{dx}$. Decresca dy fino al zero, ed in questo caso mi deve il Sig.r Conte concedere essendo $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}=\frac{2x}{y}$, dovere essere $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\frac{y}{2x}$. Onde nell'equazione $\frac{p}{dy}=\frac{2y}{dx}+\frac{dy}{dx}$ decrescendo dy ∯ fino al zero, incontrastabilmente si deve avere $\frac{p}{0}=\frac{2y}{0}+\frac{y}{2x}$; onde $\frac{px}{0}=\frac{2yx}{0}+\frac{y}{2}$ … concilj il Sig.r Conte questa equazione con la natura della Parabola, ed allora potrò concepire, come riducendosi dy a zero, possa essere $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}=\frac{2x}{y}$. Non è cosa nuova nell'Analisi l'arcano di determinare il valore della frazione $\frac{0}{0}$. Gio: Bernoulli (Act: Erud: Lip: 1704) dall'equazione $y=(-xx+a\sqrt{ax})$: … $-\sqrt{ax}$: quale in caso di $x=a$ si riduce ad $y=\frac{0}{0}$: ha preteso dimostrare $y=3a$ fatta $x=a$. Il nostro caso è diverso da quello di Gio: Bernoulli: in oltre il metodo di Gio: Bernoulli ∯ supporre $\frac{0}{0}=0$ … dimostrare $y=3a$ in caso di $x=a$ oltre il … egualmente conduce a dimostrare $y=0$.

Le due formole $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$, $\sqrt{-1}\,l\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ convengono esattissimamente … di loro; ma non sono esattissimamente dedotte dall'integrazione … differenziali. Così il suo degnissimo fratello nella lettera scritta al Sig.r Riccati essendo il raggio la sottangente, ed il protonumero … trova $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(l\frac{2a+a^2\sqrt{-1}}{2-a\sqrt{-1}}-l-a\right)$; quindi passa a conchiudere $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{2a+a^2\sqrt{-1}}{2-a\sqrt{-1}}$: ma questa formola non sussiste, se prima non si dimostri essere $\frac{2a+a^2\sqrt{-1}}{2-a\sqrt{-1}}$, $-a$ quantità di una istessa geometrica progressione il che è impossibile, come facilmente si puole ri… dalla mia in data 13: Febraro, nella quale ho dimostrato non potere sussistere, che 1, $x+\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{-1}$ siano termini d'una stessa geometrica progressione; dal che ho dedotto, che essendo ∯ … integrazione $u=\sqrt{-1}\left(l(x+\sqrt{x^2-1})-l\sqrt{-1}\right)$; malamente poi si deduceva dover essere anche $u=\sqrt{-1}\,l\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$.

Finalmente torno a ripetere, che l'incremento dell'arco si puole assegnare in supposizione, che possibile sia l'incremento del seno … onde la formola $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ esprime l'incremento dell'arco u in

supposizione, che essendo x seno di $\underline{u}$, si possa dare l'incremen-
∂x del seno x: siccome dunque l'incremento del raggio è im-
bile: quindi sarà egualmente impossibile rappresentabile l'incr-
to del quadrante per $\frac{\partial x}{\sqrt{1^2-x^2}}$: ma il Chia: Sig.r Conte osserva
quando $x=1$ abbiamo $\partial u = \frac{\partial x}{0}$; ed io contemporaneamente os-
che essendo $x=1$, ∂x non rappresenta una quantità; ma il
mentre essendo $\partial u\sqrt{1-x^2} = \partial x$; se $x=1$ sarà $\partial x = 0$; onde
incremento del quadrante $= \frac{0}{0}$. In oltre per il Chi: Sig.r Conte
formola $\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$ nella sua in data 13 Nov.e si pone eguale a
adunque fatto $x=1$; sarà $\partial u = \frac{\sqrt{-1}\,\partial x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{-1}\,\partial x}{0}$. Se $\frac{\partial x}{0}$ è
che valore reale essendo multiplicato per $\sqrt{-1}$ sarà questo
lore immaginario; onde l'incremento ∂u del quadrante p
anche essere immaginario. Che se $\frac{\partial x}{0}$ è eguale a zero: i
questo caso ∂u incremento del quadrante sarà zero. Siami p
lecito addurre di ciò una diversa ragione. Sia il diametro
dato qualunque circolo $\underline{a}$; la semiordinata $MD = y$, l'ascisse
$AM = x$ sarà costantemente $ax - x^2 = y^2$. Cresca l'ascissa dell'incr
MR, e contemporaneamente cresca la semiordinata dell'incremento FG sar
sempre $(x+\partial x)\cdot(a-x-\partial x) = (y+\partial y)(y+\partial y)$ onde $ax - x^2 - 2x\partial x + a\partial x - \partial x^2 =$



$y^2 + 2y\partial y + \partial y^2$. e $2y\partial y + \partial y^2 = a\partial x - 2x\partial x - \partial x^2$, ovv
$y\partial y + \frac{\partial y^2}{2} = \frac{a\partial x}{2} - x\partial x - \frac{\partial x^2}{2}$. Similmente se l'ascis
x eguagli, o superi il raggio AC, onde divenga
o AN; e si consideri scorrere in S o Q; contempo-
raneamente la semiordinata EC, o HN riceverà
decremento EP, o BH; onde sarà $(x+\partial x)\cdot(a-x-$
$= (y-\partial y)(y-\partial y)$ il che equivale ad $ax - x^2 - 2x$
$+ a\partial x - \partial x^2 = y^2 - 2y\partial y + \partial y^2$. Come sopra adunque
si avrà $\frac{a\partial x}{2} - x\partial x - \frac{\partial x^2}{2} = -y\partial y + \frac{\partial y^2}{2}$. Supponiamo
adunque x minore del raggio: essendo $y\partial y + \frac{\partial y^2}{2}$
$\frac{a\partial x}{2} - x\partial x - \frac{\partial x^2}{2}$ sarà nel circolo $y + \frac{\partial y}{2} : \frac{a}{2} - x - \frac{\partial x}{2} = \partial x$
Essendo x eguale, o maggiore del raggio, dall'equazione $\frac{a\partial x}{2} - x\partial x -$
$\frac{\partial x^2}{2} = -y\partial y + \frac{\partial y^2}{2}$ si dedurrà $y - \frac{\partial y}{2} : \frac{a}{2} - x - \frac{\partial x}{2} = \partial x : -\partial y$. Se dalla
prima proporzione si deducesse generalmente; trascurando i ter-
mini infinitamente piccoli; $y : \frac{a}{2} - x = \partial x : \partial y$; e dalla seconda
$y : \frac{a}{2} - x = \partial x : -\partial y$; dico che ci allontaneressimo dal vero; mentre
nella prima e seconda ragione il primo termine $y \pm \frac{\partial y}{2}$ è
za contrasto eguale ad y: ma il secondo termine $\frac{a}{2} - x - \frac{\partial x}{2}$
non è eguale ad $\frac{a}{2} - x$, se non nel caso di $\frac{a}{2} - x$ eguale ad una
quantità finita. Di fatti sia l'ascissa AO, così che manchi
di un infinitesimo per divenire eguale ad $\frac{a}{2}$ sarà in questo
caso $\frac{a}{2} - x = \partial x$: onde nel termine $\frac{a}{2} - x - \frac{\partial x}{2}$ non si può
negligentare il termine $\frac{\partial x}{2}$; riducendosi, nella supposizione di
infinitamente prossima ad $\frac{a}{2}$, il termine $\frac{a}{2} - x - \frac{\partial x}{2} = \frac{\partial x}{2}$;
proporzione si ridurrà ad $y + \frac{\partial y}{2} : \frac{\partial x}{2} = \partial x : \partial y$, o vero $2y + \partial y$:
$= \partial x : \partial y$; qual proporzione viene confermata dalla Geometria,
do $PU = 2y + \partial y : LP = OC = \partial x :: LP = \partial x : EP = \partial y$. Nella seconda pro-
porzione essendo $x = \frac{a}{2}$, non si potrà trascurare la quantità
$-\frac{\partial x}{2}$; onde nella supposizione di $x = \frac{a}{2}$ la seconda proporzio-

si ridurrà a $ry - \frac{dy}{r} : -\frac{dx}{r} = dx : -dy$, o pure a $ry - dy : -dx = dx : -dy$; quale equivale a $ry - dy : dx = dx : dy$, e perfettamente coincide con [illegible]: $CS = CS : PE$ come insegna il ultimo rigor geometrico. Dalla proporzione $rx + dy : dx = dx : dy$ quale equivale a $rLO + EP : OC = OC : EP$ si deduce $dx = OC = \sqrt{rydy + dy^2}$; e dalla proporzione $ry - dy : dx = dx : dy$; quale equivale a $rEC - EP : CS = CS : EP$, si deduce $dx = CS = \sqrt{rydy - dy^2}$: ma essendo $(rLO + EP) \cdot EP = (rEC - EP) \cdot EP$ sarà $OC = CS$; onde l'archetto LE eguale all'archetto ED, come realmente deve essere; mentre dallo scorrer che fa l'ascissa AO in [illegible] sì che la semiordinata LO riceva l'incremento EP; e dallo scorrer che fa l'ascissa AC in S, così che la semiordinata riceva lo stesso decremento EP, è chiaro fra gli elementi di Geometria dover essere $OC = CS$, e l'arco $LE = ED$. L'archetto adunque EP, quale si genera dopo essersi generato l'intero quadrante, non rappresenta dell'intero quadrante l'incremento; ma [illegible] rappresenta l'incremento di un arco infinitamente prossimo al quadrante; onde è chiaro non potersi assegnare l'arco incremento del quadrante. Dalle cose dette di sopra essendo x minore del raggio, ed essendo $\frac{a}{2} - x$ quantità finita si trova $dx = \frac{ydy}{\frac{a}{2} - x}$. Essendo x infinitamente prossima al raggio si trova $dx = \sqrt{rydy + dy^2} = \sqrt{rydy}$. I Geometri dunque per avere una costante espressione di dx; ancorchè si supponga x infinitamente prossima al raggio hanno considerata la curva circolare, come composta da un infinito numero di tangenti, quali vengono a formare un poligono coincidente con la periferia del cerchio; e dalla costante somiglianza de triangoli DMC FDS hanno dedotto essere una semiordinata qualunque y alla distanza della stessa semiordinata dal centro $\frac{a}{2} - x$, come l'incremento dell'ascissa dx all'incremento della semiordinata dy; onde generalmente $dx = \frac{ydy}{\frac{a}{2} - x}$. Deducendosi la formola $\frac{ydy}{\frac{a}{2} - x}$ dalla somiglianza de triangoli DMC, FDS la formola istessa sarà applicabile in tutti quei punti nei quali si da la semiordinata, la distanza della semiordinata dal centro l'incremento dell'ascissa e l'incremento della semiordinata: dunque applicabile in qualunque punto prossimo quanto uno vole al quadrante; ma non però applicabile al punto del quadrante nel quale vi da la semiordinata eguale al raggio; ma non si da distanza di questa semiordinata dal centro, nè incremento di questa semiordinata: onde non si danno i due triangoli simili in virtù de quali si verifica la formola $\frac{ydy}{\frac{a}{2} - x}$. La formola adunque $\frac{ydy}{\frac{a}{2} - x}$ si verifica, supponendosi x quanto uno vole prossima ad $\frac{a}{2}$ ma non mai eguale ad $\frac{a}{2}$. In questa supposizione sarà $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{\frac{a^2}{4} - ax + x^2} = \frac{y^2dy^2}{\frac{a^2}{4} - y^2}$; onde $dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2 + \frac{a^2}{4}dy^2 - y^2dy^2}{\frac{a^2}{4} - y^2} = \frac{\frac{a^2}{4}dy^2}{\frac{a^2}{4} - y^2}$; quindi $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, il che equivale alla tangente DF, coincidente con lo stesso archetto, eguale a $\frac{\frac{a}{2}dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}}$; e facendosi $\frac{a}{2} = 1$; eguale a $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$ [illegible] formola $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$, quale si deduce dalla formola $\frac{ydy}{\frac{a}{2} - x}$, sarà appli-

cabile a tutti quei punti ai quali è applicabile $\frac{x\,dy}{\frac{a}{2}-x}$: non
do adunque [illegible] applicabile al punto E del quadrante, ri-
rà a dire, che per la formola $\frac{\frac{a}{2}dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}}$ si possa rappresentare l'in-
cremento di qualunque arco
drante; ma non mai li incremento quanto uno volle prossimo al quadrante. Si rifletta
ancora, che se nel punto E del quadrante si applicasse la for-
mola $dx = \frac{x\,dy}{\frac{a}{2}-x}$ si avrebbe $dx = CS = \frac{a}{2}\cdot Ep$; onde secondo
i dif. conti dx quantità infinitesima rispetto al raggio trascen-
dentemente infinito, rispetto al rettangolo, quale nasce dalla
multiplicazione del raggio in una infinitesima di secondo
grado rispetto al raggio, il che non si accorda con il vero;
do $dx = CS = \sqrt{2y\,dy-dy^2} = \sqrt{a\cdot Ep - Ep^2}$; infinita rispetto ad Ep,
il che si accorda con il vero. Lo stesso si dica se nel punto
E si applicasse la formola $\frac{\frac{a}{2}dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}}$ si avrebbe li incremento
del quadrante $= \frac{\frac{a}{2}dy}{0} = \frac{dy}{0}$; essendo $\frac{a}{2}=y$: ma ciò non dimo-
strerebbe essere du incremento del quadrante trascendentemente
infinito rispettivamente all'incremento del seno; ma ben sì all'
il dif. Conte deve dimostrare essere li incremento del qua-
drante $= du = ED = CS$ trascendentemente infinito rispetto al
rettangolo fatto dal raggio multiplicato per un infinitesimo di
secondo grado il che certo non si accorda con il vero. Ma
siccome la formola $\frac{\frac{a}{2}dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-y^2}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$; se nel punto E si applichi la
formola $\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$, si avrà $\frac{a\,dy}{0}$; onde secondo il dif. Conte si
vrà anche verificare essere li incremento del quadrante du tra-
scendentemente infinito rispetto al rettangolo fatto dal diame-
in un infinitesimo di secondo grado. Si prenda ora la formola
$\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}} = a\,dy\cdot(a^2-4y^2)^{-1:2}$. Essendo $(a^2-4y^2)^{-1:2} = a^{-2} + \frac{4y^2}{2a^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{16y^4}{a^5}$
$+ \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{64y^6}{a^7} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{256y^8}{a^9} + \&c.$ sarà $a\,dy\cdot(a^2-4y^2)^{-1:2} = dy +$
$\frac{4y^2dy}{2a^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{16y^4dy}{a^4} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{64y^6dy}{a^6} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{256y^8dy}{a^8} + \&c.$: onde
integrando sarà l'arco $u = \int\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}} = y + \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{4y^3}{a^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot\frac{16y^5}{a^4} +$
$\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\cdot\frac{64y^7}{a^6} + \&c.$ Se in questa formola generale si faccia y egua-
le al raggio, eguale ad $\frac{a}{2}$, si avrà $\frac{a}{2} + \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\cdot$
$\frac{a}{2} + \&c.$ Stimandosi communemente, che debba l'esposta serie
rappresentare il quadrante, si potrebbe da ciò desumere un
argomento con dire: nella serie generale espressiva di un arco
u ponendo in luogo di y il raggio $\frac{a}{2}$ si ha il quadrante: ma
la serie $y + \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{4y^3}{a^2}$ rappresenta li integrale di $\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$: dunque
nella formola $\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$ ponendo similmente in luogo di y il raggio
$\frac{a}{2}$ si avrà li incremento del quadrante espresso da $\frac{a\,dy}{0}$. Per
rispondere a questo argomento, rifletto, che inconsideratamente
dagli Analisti si crede, che rappresentando $y + \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{4y^3}{a^2} + \&c.$ un arco
il di cui seno y, possa la serie istessa rappresentare il qua-

quante, ponendosi in luogo di y il raggio $\frac{a}{2}$. La serie $y + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4y^3}{a^2}$
&c. rappresenta il vero integrale di $\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$, in supposizione, che
la serie $a^{-1} + \frac{4y^2}{2a^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{16y^4}{a^5}$ + &c. rappresenti il vero valore di
$(a^2-4y^2)^{-1:2}$; ma la serie $a^{-1} + \frac{4y^2}{2a^3}$ + &c. non rappresenta il vero
valore di $(a^2-4y^2)^{-1:2}$, se non nell'unica supposizione di y
minore di $\frac{a}{2}$. Di fatti se $\frac{a}{2}$ si faccia eguale a y, sarà $(a^2-4y^2)^{-1:2}$
$(0)^{-1:2} = 0$; onde in questo caso la serie $a^{-1} + \frac{4y^2}{2a^3}$ + &c. non essendo
eguale a zero; non puole rappresentare il vero valore di
$(a^2-4y^2)^{-1:2} = 0$. Similmente se y sia maggiore di $\frac{a}{2}$ sarà
$(a^2-4y^2)^{-1:2}$ una quantità immaginaria; onde neppure in questo
caso la quantità reale $a^{-1} + \frac{4y^2}{2a^3}$ + &c. potrà rappresentare il
vero valore di $(a^2-4y^2)^{-1:2}$. E' chiaro e manifesto dunque, che
la serie $y + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4y^3}{a^2}$ + &c. rappresenta il vero integrale di $\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$
nell'unica supposizione di y minore di $\frac{a}{2}$. Non si deduca
da ciò, dunque il quadrante non si puole esprimere per $\frac{a}{2}$ +
&c. $\frac{a}{2}$ + &c.; mentre sia la semiordinata y infinitamente prossima al
raggio $\frac{a}{2}$; sarà $y = \frac{a}{2}$ meno un infinitesimo di secondo
grado rispetto al raggio istesso $\frac{a}{2}$; onde adottandosi la proporzione
di $PA = a : CO = \frac{a}{2\infty} = \frac{a}{2\infty} : PE = \frac{a}{4\infty^2}$; sarà la semiordinata
y infinitamente prossima al raggio eguale a $\frac{a}{2} - \frac{a}{4\infty^2}$;
onde nella formola generale in luogo di y sostituendo questo
valore, e negligentando i termini infinitesimi, si avrà un arco
infinitamente prossimo al quadrante espresso dalla serie $\frac{a}{2}$ +
&c. $\frac{a}{2}$ + &c. Sia $\frac{a}{2} = 1$ si convertirà $\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-4y^2}}$ in $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$; e la serie
$y + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4y^3}{a^2}$ + &c. si trasformerà in $y + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot y^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}y^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$
y^7 + &c.: ma il Sig. Conte ha determinato essere $\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{-1}$
$L\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{-1}}$: dunque $y + \frac{1}{2\cdot 3}y^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}y^5$ + &c. $= \sqrt{-1}\,L\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{-1}}$: ma nella
serie acciò si abbia il quadrante è necessario in luogo
di y sostituire il raggio 1 meno una quantità infinitesima
di secondo grado: dunque similmente se nella formola $\sqrt{-1}$
$L\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{-1}}$ in luogo di y si sostituisca la stessa quantità si avrà
il quadrante; onde chiamando m l'infinitesima di secondo grado
sarà il quadrante espresso da $\sqrt{-1}\,L\frac{1-m+\sqrt{2m+m^2}}{\sqrt{-1}}$, e non
da $\sqrt{-1}\,L\frac{1}{\sqrt{-1}}$, come si pretende; ponendo nella formola uno in
luogo di y; qual sostituzione non posso accordare: mentre se $\sqrt{-1}$
$L\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{-1}}$ è l'integrale di $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$; essendosi dimostrato essere $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$
l'incremento di un arco quanto uno vole prossimo al quadrante
lo stesso si dovrà dire della formola $\sqrt{-1}\,L\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{-1}}$; quale rappresenterà
un arco quanto uno vole prossimo al quadrante, onde
per y si deve sostituire una quantità, quanto uno vole prossima

Il raggio m.o non era [illegible] eguale al raggio [illegible] [illegible] altri
[illegible] [illegible] dalla formola [illegible] quale [illegible]
[illegible] di un [illegible] il di mio raggio [illegible] [illegible] la [illegible]
[illegible] non [illegible] [illegible] [illegible] ad altri [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] alla quale [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]. Mi confermo del mio [illegible]
[illegible] [illegible] corrispondenza alla quale non posso [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].
[illegible] Roma [illegible] Magg.o 1779

Umiliss.o ed Obblig.mo Servo
Giuseppe Calandrelli

[illegible]
ne [illegible]
riccome
stessa
unta
[illegible]

$y=0$,
[illegible]ion[illegible]
una
[illegible]
signa[illegible]

25

All'Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Colmo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

...lla dottissima lettera in data [illegible] Marzo vole il Sig.r Conte, che il valore
...ale di $\frac{y}{n} = 1$ non escluda gli infiniti valori immaginarj indispensabil...
...ente richiesti dal grado dell'equazione. Per dimostrare che le condizio...
...ne problemi di qualunque grado si determinano, quali delle radici co...
...spondano alle condizioni dello stesso problema, ho nella mia in data
... Febraro proposto un problema: data la tangente di 45° = al raggio = 1,
...erminare la tangente di 15°. Chiamando x la tangente di 15° per la
...ometria si ottiene l'equazione $x^3 - 3x^2 + 1 - 3x = 0$. Questa equazione
...somministra tre diversi valori di x; cioè -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$: ma siccome
...proposto problema un sol caso riguarda; quindi la sola radice $2-\sqrt{3}$ co...
...sponde a questo unico caso. Il problema: Cercare quell'arco la cui
...angente $= x$, che triplicato esigga la tangente eguale al raggio del circolo
...più generico del problema da me proposto; mentre il mio un sol caso
...guarda al quale soddisfa la radice $2-\sqrt{3}$; ed il secondo tre diversi casi
...guarda ai quali ottimamente soddisfano i tre diversi valori di x. Per
...n lasciare più luogo a dubitare si prenda l'equazione $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
...sta equazione a tre diversi casi si riferisce, cioè ad $x = 2$, ad $x = 1+\sqrt{-1}$
...$x = 1-\sqrt{-1}$. Che se dalle condizioni del problema costasse essere x reale;
...ché tre siano i valori di x; ciò non ostante a questa condizione non
...uole soddisfare se non l'unico valore di $x = 2$. Lo stesso si dica dell'
...uazione dell'Eulero $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$ nella quale y ha infiniti valori.
...a siccome costa essere $(1+\frac{y}{n})$ quantità reale, quindi l'equazione, quale
...n se stessa considerata si riferisce ad infiniti, e diversi casi di y: con
...aggiunta condizione di $(1+\frac{y}{n})$ reale; si riferisce all'unico caso di $y = 0$,
...do per tutti gli altri casi possibili; y immaginaria. Tutto ciò è con...
...rme ai sentimenti del Chiar. Sig.r Conte il quale nel fine della sua
...pittissima così raziocina. Facendo l'Eulero $(1+\frac{y}{n}) = y^n$ questa con...
...ione necessariamente richiede che $\frac{y}{n}$ sia grandezza minima in riguardo
...a 1 ..... e poiché i valori immaginarj di y sono eguali a $\pm 2\lambda p\sqrt{-1}$
...ovrà essere infinitesima la grandezza $\pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n} = \frac{y}{n}$ ..... Fra le radici
...unque dell'equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$ a cui perviene l'Eulero quelle
...ltanto spettano alla logistica in riguardo alle quali si verifica la condi...
...ione, che λ sia minimo rispetto ad n. Ciò posto così raziocinio. Se dal...
...uazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$ si deduce $\frac{y}{n} = \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$: e se la condizione di
...ssere $\frac{y}{n}$ infinitesima, fa che debba anche essere infinitesima $\pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$,
...di conseguenza λ immensamente minore di n: per lo stesso motivo la
...ndizione di essere $\frac{y}{n}$ reale dovrà fare, che anche $\pm 2\lambda p\sqrt{-1}$ sia
...ale, e per conseguenza $\lambda = 0$. Fra le radici adunque dell'equazione
...$\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$ a cui perviene l'Eulero, quelle soltanto spettano alla
...gistica in riguardo alle quali si verifica la condizione che λ sia ...

...riusce che il Sig.r Conte ritratti il suo sentimento riguardo alla fra...
...ione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$; quale benché z sia infinita rispetto ad a non puole
...i considerarsi come reale. A questo proposito io non farò altro, che
...porre due ragioni da me communicate al Sig.r Canterzani Secreta...
...dell'Istituto. Tutta la questione si riduce a vedere se $z \pm \frac{z\sqrt{-1}}{n}$ sia

eguale a z; supponendo $n=\infty$. In primo luogo si osservi che un prodo[tto] immaginario non puole nascere se non dalla multiplicazione di una quantità immaginaria: ma $\left(z+\frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n = z^n + z^n\sqrt{-1} - \frac{n\cdot n-1}{n^2\cdot 2}\cdot z^n - \frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{n^3\cdot 2\cdot 3}\ldots$ $+\frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{n^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot z^n + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3\cdot n-4}{n^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot z^n\sqrt{-1}$ – ec; $\left(z-\frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n = z^n - z^n\ldots$ $-\frac{n\cdot n-1}{n^2\cdot 2}\cdot z^n + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{n^3\cdot 2\cdot 3}\cdot z^n\sqrt{-1} + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{n^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot z^n - \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3\cdot n-4}{n^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot z^n\sqrt{-1}$ – ec. [sono] prodotti realmente immaginarii: dunque anche le quantità $z\pm\frac{z\sqrt{-1}}{n}$, $z-\frac{z\ldots}{n}$ dalle multiplicazione delle quali nascono questi immaginarii prodo[tti] saranno immaginarie; dunque falso essere $z\pm\frac{z\sqrt{-1}}{n}=z$. In secondo luogo in tanto la quantità $z\pm z\sqrt{-1}$ non si considera reale, in quanto la [quan]tità reale z è accresciuta o diminuita di una quantità immaginaria $\pm z\sqrt{-1}$ qual quantità immaginaria rende immaginaria la totale quan[tità] $z\pm z\sqrt{-1}$; or siccome nell'impossibile non si danno gradi, egualmente [im]possibile è la quantità $\pm z\sqrt{-1}$, che la quantità $\pm\frac{z\sqrt{-1}}{n}$; onde per lo ste[sso] motivo per il quale la quantità $z\pm z\sqrt{-1}$ si dice impossibile, per lo [stesso] motivo si deve dire impossibile la quantità $z\pm\frac{z\sqrt{-1}}{n}$; onde di nuovo [non] si potrà mai dire $z\pm\frac{z\sqrt{-1}}{n}$ quantità reale, e però eguale a z con negli[gere] il termine $\pm\frac{z\sqrt{-1}}{n}$. In oltre se essendo z infinita rispe[tto] ad a la frazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ senza errore diviene eguale ad 1, per lo stesso motivo; essendo $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1-z\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1-z\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}$, se la tangente sia infinitesima rispetto all'unità, o raggio sarà $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1-z\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}\ldots$ $l1: -u = \frac{-\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1-z\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$: onde $\frac{2u}{\sqrt{-1}} = -2u\sqrt{-1} = l1$; [si]milmente $-\frac{2u}{\sqrt{-1}} = 2u\sqrt{-1} = l1$: dunque $\pm 2u\sqrt{-1} = l1$: ma essendo la tangente z infinitesima rispetto al raggio, anche l'arco u è in[fi]nitesimo: dunque contro di Eulero, e contro del Sig.r Conte mi si dovrà concedere, che la formola $\pm 2\lambda p\sqrt{-1}$ non esprime tutti i Logaritmi [possi]bili di uno; mentre nell'ipotesi di u infinitesimo: $\pm 2u\sqrt{-1}$ non [si] contiene nella formola $\pm 2\lambda p\sqrt{-1}$

Le qui indicate ragioni sono sufficienti a mio credere per dimostrare non potersi nell'equazione $y_n = \text{Cos}: \frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm \text{Sen}: \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, negligere la quantità infinitesima $\text{Cos}: \frac{2\lambda p}{n} - 1$, onde da ciò dedurre $y = \pm 2\lambda p\ldots$ senza ulteriore esame si ammetta l'equazione $y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$; quindi si so[sti]tuisca nella formola $(1+y_n)^n = 1$, e si dovrà verificare $\left(1\pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}\right)\ldots$ Il Sig.r Conte rifletta, che questa equazione non puole esattamen[te] avverarsi, perchè nella potestà $\left(1\pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ avranno sempre lu[o]go gl'immaginarii eccettuato il caso di $\lambda = 0$. In oltre osservo, che questi immaginarii saranno trascurabili rispettivamente alle quan[tità] reali. Si prenda adunque per λ l'infimo numero tra l'interi, qual sarà uno: ed in questa supposizione si avrà $\left(1+\frac{2p\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + 2p\sqrt{-1} - \frac{n\cdot n-1}{n^2\ldots}$ $4p^2 - \frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{n^3\cdot 2\cdot 3}\cdot 8p^3\sqrt{-1} + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{n^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 16p^4 + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3\cdot n-4}{n^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 32p^5\sqrt{-1}\ldots$ $\left(1-\frac{2p\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 - 2p\sqrt{-1} - \frac{n\cdot n-1}{n^2\cdot 2}\cdot 4p^2 + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{n^3\cdot 2\cdot 3}\cdot 8p^3\sqrt{-1} + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{n^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 16p^4 - \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3\cdot n-4}{n^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 32p^5\sqrt{-1}$ – ec: ma queste attuali potestà sono real[mente] immaginarie: dunque sarà sempre impossibile l'equazione $\left(1\pm\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1$: onde [col] il metodo di Eulero, anche quando λ rappresenta l'unità, o infimo numero [tra] l'interi.

Godo che il Sig.r Conte convenga su l'ultima riflessione da me fatta contro il metodo di Eulero; e nel tempo istesso vivamente le sono tenuto per la tra[smissione de'] suoi avvertimenti, quale io venero come parto delle sue profonde meditazioni, alle quali sarà anche tenuta l'Analisi, se da questo nostro carteggio spero a ricavarne qualche incremento. Io immutabilmente mi dico

di V.S. Ill.ma Roma 20 Maggio 1779

umil.mo ed obblig.mo servo
Giuseppe Calandrelli.

All'Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso.

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron Col.mo 163

finalmente a rispondere alla sua terza, e dottissima lettera in data 17: febraro. *

... la proporzione geometrica esigge le egualità delle ... ultimo termine

Ill.mo Sig. Sig. e Pron Col.mo 161

Venerdì prossimo spedirò a Venezia la lettera da me scritta all'Anonimo, ed un' altra ancora, che io aveva preparata per la stampa, è già più d'un'anno, ma ho poi trattenuta, perchè non sono affatto contento. Il plico sarà consegnato al Sig. Tommaso Corteler a S. Giuliano, affinchè il faccia pervenire alle mani di V. S. Ill.ma franco di porto. Ella è supplicata ad esaminar l'uno, e l'altro scritto, aggiugnere, o levare, e far le note ove giudicherà più opportuno, e massimamente al primo. Non so, se abbia incontrata la sua mente in ogni cosa. Io mi lusingo, d'averle esposto tutto con chiarezza bastante. In ogni caso supplirò, ove sarà bisogno. Oggi appunto sono usciti alcuni esemplari del Giornale ultimamente stampato. S'avessi creduto cotanta lentezza, sarebbe stato luogo a stampare ancora la lettera all'Anonimo, ed avrei così meglio secondate le sue intenzioni; ma la tardanza inaspettata è provenuta da una disgrazia, e da altre circostanze non prevedute. Io non ho per anche avuto il tomo. Son sicuro di godere il sensatissimo giudizio, e di essere onorato di qualch'altro suo comando, giacchè mi protesto con profondo ossequio

Di V. S. Ill.ma

Modena 1. Maggio 1779

Umil.mo e Dev.mo Servitore
Giuseppe Cesarelli

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron Col.mo

finalmente a rispondere alla sua grata, e dottissima lettera in [illegible] 17: Febraro. *
[illegible] che la proporzione geometrica [illegible] richiede le equalità delle [illegible] termini

MODENA

Al Nobile Ill.mo Sig.r Sig.r e Pron Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia p. Trevigi

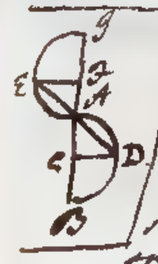
2

...no finalmente a rispondere alla sua terza, e dottissima lettera in
data 17: Febbraro. *
...fesso è vero, che la proporzione geometrica esigge l'egualità delle
...tinenze; ma in oltre voglio, che la continenza del primo termi=
...e nel secondo, debba essere simile alla continenza del terzo nel
quarto; onde nella supposta proporzione si verifica la prima parte;
...ma non la seconda. Se la continenza del primo termine nel secondo
...sia simile, ed eguale alla continenza del terzo nel quarto, allora pur
...anche le radici di qualunque grado positive o negative de' quattro
...termini costituiranno una proporzione. Così se sia $a:b=c:d$; sarà an=
...che $\pm\sqrt{a}:\pm\sqrt{b}=\pm\sqrt{c}:\pm\sqrt{d}$. Se adunque $1:-1;-1:1$ sono due eguali ra=
...gioni dovrebbe anche essere $\sqrt{1}:\sqrt{-1}=\sqrt{-1}:\sqrt{1}$; $-\sqrt{1}:-\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}:-\sqrt{1}$,
...il che è impossibile. Non si creda da ciò poter desumere un argo=
...mento consimile, e dimostrare, non essere la frazione $\frac{1}{-1}=$ alla
...frazione $\frac{-1}{1}$; il che evidentemente è vero, e da me già concesso.
...L'argomento dunque si potrebbe istituire in questo modo. Essendo $\frac{1}{-1}$
...sarà $\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$: ma $\sqrt{\frac{1}{-1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$; $\sqrt{\frac{-1}{1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$: dunque $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$; il
...che è falso. Se questo argomento con ogni esattezza si esponga si rile=
...verà non essere $1:-1;-1:1$ ragioni eguali. Si rifletta adunque, che
...essendo $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; perchè se della frazione $\frac{a}{b}$ il valore si dica
...m, sarà il numeratore, al denominatore, come il valor della
...frazione, all'unità; onde $a:b=m:1$ e quindi $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{m}:\sqrt{1}$; on=
...de $\sqrt{m}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$: ma $m=\frac{a}{b}$ dunque $\sqrt{m}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Ciò=
...posto essendo $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$ sarà $\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$. Essendo nella frazione $\frac{-1}{1}$ il
...numeratore -1 al denominatore 1 come il valor della frazione
... all'unità; sarà anche $\sqrt{-1}:\sqrt{1}=\sqrt{-1}:\sqrt{1}$; onde $\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{1}}{\sqrt{1}}=$
...$\sqrt{\frac{-1}{1}}$: ma essendo $-1=\frac{-1}{1}$ sarà $\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$: dunque si verifica an=
...che $\sqrt{\frac{-1}{1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$. Al contrario essendo la frazione $\frac{1}{-1}=-1$ sarà
...$\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{-1}$: ma $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ non è eguale a $\sqrt{-1}$; ma bensì a $-\sqrt{-1}$: dunque
...anche $\sqrt{\frac{1}{-1}}$ sarà eguale a $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$. Dimostrato che $\sqrt{\frac{1}{-1}}$ non possa
...essere eguale a $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ così raziocinio. La radice positiva di una fra=
...zione è eguale alla radice positiva del numeratore, divisa per la
...radice positiva del denominatore; quando il numeratore, è al deno=
...minatore come il valor della frazione, all'unità: ma $\sqrt{\frac{1}{-1}}$ non
...è eguale a $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$: dunque il numeratore 1 non sarà al denomi=
...natore -1 come il valor della frazione -1 all'unità: dunque
...$1:-1;-1:1$ non sono due ragioni eguali.
...del circolo alla semiordinata positiva corrisponde di posizione
...contraria una semiordinata negativa: ma rispetto ai segmenti
...del diametro non si dà semiordinata negativa; onde possa av=
...verarsi la proporzione $aa-x:-y=-y:x$. Dall'equazione $aax-$
...$x^2=y^2$ si dee dedurre $\pm\sqrt{aax-x^2}=\pm y$; e non semplicemente $\sqrt{aax-x^2}$
...$=\pm y$. Se la radice di $aax-x^2$ si prende positivamente, sarà sempre
...$\sqrt{aax-x^2}$ quantità positiva; onde non potrà mai essere $\sqrt{aax-x^2}=-y$
...quantità negativa: Così se nell'equazione $\sqrt{aax-x^2}=\pm y$ si faccia x
...$=a$ sarà $\sqrt{a^2}=\pm y=\pm a$; onde è chiaro doversi esprimere $\pm\sqrt{a^2}=$

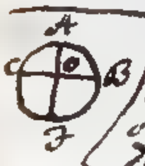
* Sua stava su data dei 19. Marzo.

mia Servidore
relli

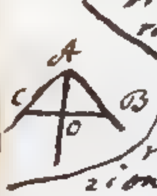
$\pm a$; ed in genere $\pm\sqrt{2ax-x^2}=\pm y$. I semicircoli poi de' quali mi
servito per verificare le equazione $\pm\sqrt{2ax-x^2}=\pm y$ appartengo
alla stessa curva, in quanto che fatto da A verso B il princi-



pio delle ascisse positive e da A verso G il princip.
delle ascisse negative in tutti i punti della curva
AEADB si trova costantemente la stessa equazione
$2ax-x^2=y^2$: ne la ragione addotta in contrario
è contro le mie posizioni: secondo le quali, nel semi
circolo AEG, di posizione contraria al semicircolo ADB
solo le ascissa AF è negativa rispetto all'ascissa AC
anche la costante AG è negativa rispetto ad AB, ondi
il prodotto di AF in FG positivo, ed eguale al prodotto
AC in CB; onde la semiordinata EF è reale come è reale
La somma del discorso la ristringo in questo; che essendo
circolo $2a-x$, ed x i segmenti del diametro; e non essendo
circolo semiordinata alcuna y, quale sia negativa rispetto
segmenti $2a-x$, ed x; quindi sarà sempre falso, essere ne
circolo $2a-x:-y=-y:x$. In secondo luogo tutto il discor
del Sig.r Conte si riduce al seguente. Nel circolo la semi
dinata $OB=y$ è media proporzionale tra $AO=x$ ed $OF=$



ma $CO=-y$ è media proporzionale tra la stessa AO
OF: dunque $2a-x:-y=-y:x$. Questo argomento è consim
al seguente. Sia CAB un triangolo rettangolo in A: sia
$AO=x$, $OB=y$; sarà per la Geometria l'ascissa a
dia proporzionale tra OB e CO: ma $CO=-y$: dunque
rà $y:x=x:-y$. L'uno, ed altro argomento si dimostra



so con rispondere, che CO è eguale a $-y$ rispetto a O
ma non rispetto a AO ed OF nel primo argomento: ne
rispetto ad AO nel secondo: onde come è falsa la pro
zione $y:x=x:-y$; egualmente falsa dice essere la pro
zione $2a-x:-y=-y:x$. Essendo cosa facile applicare tutto
to discorso alla Parabola, non starò quindi a fermarmi su
questa in particolare.
La formola $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,la\left(\frac{-z-a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ moltiplicando, e dividendo per $z+a$
si riduce ad $u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,la\left(\frac{-z^2-2az\sqrt{-1}+a^2}{z^2+a^2}\right)$. Si conceda ora, che nel caso
$z=\frac{a^2}{0}$ debba essere $-z^2:-2az\sqrt{-1}=z:2a\sqrt{-1}=\frac{a^2}{0}:2a\sqrt{-1}=a:0$: sic
me nel caso stesso di $z=\frac{a^2}{0}$ non mi puole negare il Sig.r Con
essere $-z^2:-2az\sqrt{-1}=\frac{a^4}{0\cdot 0}:\frac{2a^3\sqrt{-1}}{0}$: dunque incontrastabilmente
dovrà concedere essere nel caso di $z=\frac{a^2}{0}$; $\frac{a^4}{00}:\frac{2a^3\sqrt{-1}}{0}=a:0$. Or
io domando se $\frac{a^4}{0\cdot 0}$ differisca da $\frac{a^4}{0}$; o non differisca: se diffe
risce: dunque mi si dovrà concedere, che $0\cdot 0$ differisca da
se non differisce; come è possibile allora la proporzione
$\frac{2a^3\sqrt{-1}}{0}=a:0$; volendo pur anche il Sig.r Conte dici $\frac{a^4}{0}$, che $\frac{2a^3}{0}$
ripresentino quantità trascendentemente infinite. Io più
i zeri, e meno trovo la via di liberare l'Analisi dalle incon
venienti, quali vengono introdotti dai zeri assoluti.
Ponendo il Sig.r Conte la frazione $\frac{-\sqrt{-1}-\frac{p}{n}}{-\sqrt{-1}+\frac{p}{n}}=1+\frac{2p}{n\sqrt{-1}}=1-\frac{2p\sqrt{-1}}{n}$
trasforma la formola da me proposta $p=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\frac{p}{n}-\sqrt{-1}}{\frac{p}{n}-\sqrt{-1}}\right)^n$ in p

$(1-\frac{2p\sqrt{-1}}{n})^n$: ma questa formola non concilia come il quadran-
te p possa divenire eguale a $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ L-1; se non si faccia vedere
esser $(1-\frac{2p\sqrt{-1}}{n})^n=-1$: ma siccome $(1-\frac{2p\sqrt{-1}}{n})^n = 1-2p\sqrt{-1}-\frac{n\cdot n-1}{2\cdot n^2}4p^2$
$\frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{2\cdot 3\cdot n^3}\cdot 8p^3\sqrt{-1}+\frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{2\cdot n^4}\cdot 16p^4 -$ &c è una vera quantità
immaginaria; quindi non solo sarà falso essere il quadrante p=
$\frac{\sqrt{-1}}{2}$ L-1; ma bensì anche, facendo come il Sig. Conte $-2p\sqrt{-1}=y$;
$(1+\frac{y}{n})^n=x$: dovendo essere necessariamente $(1+\frac{y}{n})^n$, come si è
dimostrato; quantità immaginaria; ripugnerà essere $x=\pm 1$.
io il giudizio di questo ne mio convenevole lasciarlo all' im-
parzialità del mio Sig. Conte, di cui ho l'onore immutabilmente
protestarmi. &c

di V.S. Illma. Roma 16 Maggio 1779.

Umilmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli.

8

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pron: Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Ill.mo Sig. Sig. Prone Col.mo 167

[Q]uando Ella avrà terminato il suo Trattato sulla teoria de' Loga-
ritmi lo leggerò molto volentieri, e per obbedirla le comu-
nicherò la mia sincera opinione.
[S]embrami di avere patentemente dimostrato nella mia lettera
del 17. Marzo $p\sqrt{-1} = l.-1$; nè mi par che si possa dubitare,
essere $1-1 = \sqrt{-1} - \sqrt{-1}$, e per conseguenza $0 = 0\sqrt{-1}$. In riguar-
do al segno positivo, o negativo applicato al nulla, la sup-
[pl]ico a riflettere, che non v'è ragione di scrivere piut-
tosto $1-1 = +0$, che $1-1 = -0$. Il nulla rigorosamente
parlando non è nè positivo, nè negativo; il che signi-
fica dover esso tralasciarsi nelle equazioni.
[Conce]dendosi da Lei, che la base logaritmica, ed il protonu-
mero siano capaci di infiniti valori, viene ad accordare,
che ad un numero immaginario possa corrispondere
un logaritmo reale. Sia il protonumero $= 1$, onde alla
base e si riferisca il logaritmo $= 1$. Competendo alla
base anche il valore $e\sqrt{-1}$, ad un tal numero immagina-
rio si adatterà il logaritmo reale $= 1$. Può ancora un
numero reale ricevere un logaritmo misto di reale
[...]llante, e di immaginario costante; perchè sendo $= 0$
la flussione dell'immaginario costante, sussiste l'ana-
logia $\frac{dy}{y} : dx :: 1 : a$, in cui $\frac{dy}{y}$, e dx sono quantità
reali.
[...] tornerà ad esaminare posatamente le cose da me scritte
nella lettera del 24. Marzo, mi lusingo che si avvederà,
che vanno di accordo col vero. Dipendono esse da due
principj, che il logaritmi dei numeri negativi sono eguali
a quelli dei numeri positivi, e che ad una serie geome-
tri[ca]

rica di numeri due corrisponderà una serie aritmetica di logaritmi.

Si comincierà quanto prima a stampare in Venezia una mia Opera in due Tomi in 4to sopra le Leggi del Contrappunto. Quando ne sarà stabilito il prezzo, la pregherò a procurarmi un qualche numero di Associati, avendo preso impegno di esitarne 50. copie per conto dello Stampatore. Sembrami d'aver trattata la Musica, deducendone la teorica dai suoi fondamentali principj: ma niuno è buon giudice in causa propria. Sono col maggiore rispetto

Di V.S. Ill.ma

Treviso 23. Maggio 1779

Ill.mo Sig. Petronio Mª Caldani
Roma

Divot.mo Obbl.mo Serv.e
Giordano Riccati

nel spedire
ultro con=
m sicurez=
ono alcun
nelche ne=,
cie, del
atti ch=

Dunque ve=
i metodi, ten=
applicazio, all
ha fatto
Alle mie=

mie studio,
levato, nelle
della Luna,
il primo non
ildone, che=
azioni della
mod. diffi=

Servitore
Vitelli

146

zione

40

Rispedirono di tutto ... il libro ... alle mani di V. S. Ill.ma il plico da me spedito a Venezia con tutte le circostanze, ch'io già le indicai. Doveva essere questo consegnato al Sig. Mondo Corvella affinchè procurasse di trasmetterlo con sicurezza e franco di porto. Non avendone ancora nuova notizia alcuna, sono alquanto timoroso di qualche sinistro incontro. Pertanto io la supplico di darmi qualche riscontro intorno a ciò. Trattanto io mi fo coraggio a pregarla di un'altra grazia. Il Sig. Abate Frisi ha pubblicato l'Elogio di Newton, nel quale leggonsi i seguenti passi.

Parlando egli dell'invenzione de' nuovi metodi così si esprime == A che cosa dunque si riduce il merito principale de' nuovi metodi? Alla maggior semplicità de' metodi, che già si sapevano, alla maggior estensione che vi si è dato, alla generale applicazione, che se n'è fatto: e il Leibnitz di concerto coll'amico Bernoulli ne ha fatto applicazione a tre, o quattro problemi, il Newton a tutta l'Algebra, la Meccanica, la Ottica, l'Astronomia == = =

Aggiunge poi egli dice == L'Opera dei Principj è quella a cui si è dato più studio, e più ammirazione, che a qualunque altra. Dei cinque errori, che vi ha rilevato, sulle attrazioni della Terra sferoidica, sull'altezza delle maree, sulla figura della Luna, sulla precessione degli Equinozj e sulle piccole vibrazioni dei Fluidi, il primo non fa variare la proporzione degli assi della Terra; gli altri due non richiedono, che una piccola correzione: il quarto, credesi che sia, con raddoppiare le aberrazioni dell'asse della Terra si accorda meglio coi Fenomeni: e il quinto, ch'era ancora diffi=

$AO = \frac{a^2}{x}$; dunque $AO = \frac{a}{a^2-b^2}$: Serviva così — questa formula, perchè $AB = \frac{a^2-b^2}{2b}$ $x = \frac{a^2-b^2}{2b}$ è una linea, ed aver da

Servitori rolli

[illegible] non [illegible] il calcolo della velocità del suono = [illegible]

Ora io la supplico a communicargli il modo da me [illegible] [illegible] a [illegible] [illegible] insieme all'altre notizie da me [illegible], e [illegible] con [illegible] [illegible] mi [illegible]

Di V. S. Illma

Modena 2[illegible] Maggio 1779

Devmo e Obblmo Servitore
Giuseppe [illegible]

$AO = \frac{a^2}{x}$; dunque $AO = \frac{a}{\frac{a^2-b^2}{2b}}$ Scrivo così

questa formola, perchè $AB = x = \frac{a^2-b^2}{2b}$ è una linea, ed aver

da

5

Al Nobile Sig.re Sig.re e Pron. mio
Il Sig. Conte Giordano Riccati

Treviso

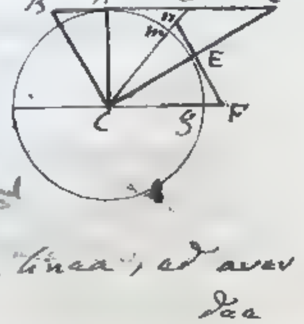
Illmo Sig. Sig. Prone Colmo 195

... che sia terminata la stampa

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo 191

, Sig. Ab. Riverito,

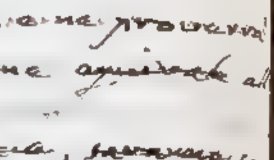
... la ricevuta di una sua elaboratissima lettera, alla quale
... avrò gradatamente risposta ...
... nulla è un Proteo, siccome quello, ch'è capace di infiniti fattori
... &c. Da ciò ne nasce, ch'io non posso sapere il valore di
$\frac{0}{0}$, se non mi si rendono noti i due fattori dei due nulla.
... finalmente $\frac{dx}{du} = \frac{0}{0}$, ed io scoprirò i convenienti fattori dei
nulla; se indagherò la ragione a costantemente ricevuta, o a
cui sempre più si accostano dx, dy, secondo che saranno diven-
tando sempre più piccioli, la qual ragione nelli ultimi limi-
ti sarà geometricamente esatta. Quindi nella parabola
$\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0} = \frac{2x}{y} = \frac{f.0}{7.0}$, e perciò $f : 7 :: 2x : y$
$-\hat{a}^2 - aV\!-\!1.0 = -a^2$, e dividendo tutti i ter-
... alla equazione
mini pel nulla fornito dallo stesso fattore, che si supponga
... nel termine $-aV\!-\!1.0$, trovo
moltiplicare il nulla
$\frac{-\hat{a}^2}{0} - \frac{aV\!-\!1.0}{0} = \frac{-a^2}{0}$: ma $\frac{0}{0} = 1$ nella ipotesi dei fattori
eguali; dunque $-\frac{\hat{a}^2}{0} - aV\!-\!1 = -\frac{a^2}{0}$; il che &c.
... tangente di un arco, il cui raggio $= a$ ed il seno $= x$ è certa-
mente $= \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$, e quando $x = a$, la tangente del quadrante
si agguaglia ad $\frac{a^2}{0}$. Significa questa espressione, che
la secante è parallela alla tangente, essendo in tal caso
la cotangente $= 0$. Il perchè la secante non si incontra
mai colla tangente, ed al più si può supporre, che la
intersechi ad una lontananza trascendentemente infinita.
Questa riflessione serve a confermare la verità che $aV\!-\!1$
possa trascurarsi in paragone di $\frac{a^2}{0}$.



... triangoli CnF, CDB non sono simili, se non
quando gli archi Am, Em si agguagliano, e
per conseguenza $AD = b = En = d$. Per la
qual cosa $AB = x = \frac{a^2 - b^2}{2b}$: ma inoltre
$AO = \frac{\hat{a}^2}{x}$; dunque $AO = \frac{a^2}{\frac{a^2-b^2}{2b}}$. Scrivo così
questa formola, perchè $AB = x = \frac{a^2-b^2}{2b}$ è una linea, ed aver
da...

... ga, che
... contra,
... ro infi-
... io. L'
... ravvi è
... sono stam-
... ivo, e più
... Podic
... involto
... ndo di
... ima ...
... miera
... e, che
... non ...
... lore
... ma a
... servidor
... velli

dee una sola dimensione. Si faccia $b = a$, come provava[illegible]
$AO = \frac{a^2}{\frac{a^2 - a^2}{2a}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a} = \frac{a^2}{0}$. ~~Questa espressione equivale all'~~
~~altra $AO = \frac{a^2}{0}$; perchè sendosi avuto $Ez = a$, sarebbero~~
~~per parallele le due linee [illegible], e perchè [illegible]~~
~~[illegible] [illegible]~~
~~[illegible] e supponendo [illegible] = [illegible]~~
~~[illegible] $AO = \frac{a^2}{0}$ e conseguentemente $AO = aa^2$~~
Sia l'arco $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{-z + \sqrt{-1}}{z - \sqrt{-1}}$. Si dica p il compimento dell'arco
al semicircolo, e per la regola di proporzione troveremo
$p = \frac{p\sqrt{-1}}{u \cdot 2} l \frac{-z - \sqrt{-1}}{z - \sqrt{-1}}$. Diventerà p uguale al semicircolo, qua-
lora sia $u = 0$; e poichè in tal circostanza $z = \infty$, ne proverrà
$p = \frac{p\sqrt{-1}}{0 \cdot 2} l 1$, e per conseguenza $0 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l 1$, equazione ve-
rissima nascente dal porre nella prima formola $u = 0$
$z = \infty$.



Suppongasi per esempio il circolo del diametro oi la metà di quello del diametro ng, e
a qualunque valore si assegni a PG, saranno
sempre i due circoli corrispondenti in ragione di $1:2$,
e ciò si avvererà anche quando PG, e ciascuno dei due
circoli si eguagliano al nulla. In questo caso i fattori
dei due nulla sono $1, 2$; e quindi $0 : 0 :: 1 : 2$,
ragione costantemente ritenuta dei circoli, i cui dia-
metri oi, ng.
La soluzione della obbiezione che riguarda alla parabola di-
pende da ciò che ho scritto al principio della presente
lettera. Il supporre $\frac{ydy}{a}$ evanescente, dimodochè si
mantenga l'esattezza geometrica, egli è un [illegible]
a discendere nella mia opinione. Se nulla si [illegible]
dee necessariamente per ultimo annullarsi la flussione di

Ill.mo Sig. Sig. Pron.e Col.mo

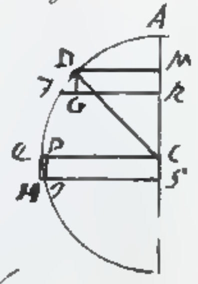
. . . . che sia terminata la stampa

1793

[D]alla formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{r}\left(l\,\frac{az + a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}} - la\right)$ si passa a quest'altra $u = \frac{\sqrt{-1}}{r}\, l\,\frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$ mediante l'analogia $-a : \frac{az + a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}} :: a : -\frac{az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$, che forma una vera serie geometrica, come credo d'avere chiaramente provato nella mia dei 19: Marzo.

[Ma]ggior il Chia. Sig. Ab. e riflettava, che dalla formola $du = \frac{\sqrt{-1}\,.\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ vien determinato reale il valore di du; perchè $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}$, e conseguentemente $du = \frac{\sqrt{-1}\,.\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{-1}\,.\,dx}{\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Quando $\sqrt{1-x^2} = 0$, egli è d'uopo porre $\sqrt{x^2-1} = 0\sqrt{-1}$. La formola $\frac{du}{1} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ fa vedere, che siccome 1 è infinito rispettivamente a du, così generalmente $\sqrt{1-x^2}$ ha da essere infinito in riguardo a dx. Il perchè ciò si verifica anche qualora $\sqrt{1-x^2} = 0$. Avremo dunque in tal circostanza $\frac{du}{1} = \frac{0}{0} = \frac{0\cdot du}{0\cdot 1}$ dovendo essere $= du$ il fattore, che moltiplica il nulla superiore, ed $= 1$ il fattore, che moltiplica il nulla inferiore.

Per la natura del circolo abbiamo



$D\gamma : \gamma G :: CD : CM$

$du : dx :: 1 : \sqrt{1-x^2}$, e perciò

$\frac{du}{1} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. La stessa analogia vale anche quando $CM = 0$; imperciocchè siccome diventa $= 0$ l'angolo CDM, così parimente si annichila l'angolo γDG, convertendo perfettamente le due flussioni Qγ, QH mandò stanno per annullarsi, ed essendo nullo l'angolo del contatto HQγ.

[Mi] conservi il Pregiatissimo Sig. Abate la grazia sua, mentre con piena stima passo a segnarmi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 26. Maggio 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Umil.mo ed Obbl.mo Servo
Giordano Riccati

1914.

Ill.^me^ Sig. Sig. Pron̄e Colmo

. . . . . . che sia terminata la stampa

ga, che
Chacera,
ro infe=
rio. Le
mbro' e
sono stan=
ivo, e più
Codici
inostro
do di
ima oc=
nicora
le, che
non in=
tanc
nas

Servitor
relli

[illegible]

Ill.me Sig. Sig. Prone Colmo

[illegible] che sia terminata la stampa

Ill.mo Sig. Sig. Padrone Col.mo

Mi riesce gratissima la notizia, che sia terminata la stampa della Geometria. Egli è verissimo, che il vecchio metodo delle esaustioni coincide col Newtoniano delle Ragioni prime, ed ultime. Suppone il Newton, che le flussioni vadano finalmente a terminare nel nulla, e da questa supposizione dipende l'esattezza geometrica del suo metodo. Quando per esempio nella parabola $dy : dx :: y : z$, avremo $z = \frac{ydx}{dy}$: ma $dx = \frac{2ydy + dy^2}{a}$; dunque $z = \frac{2y^2 + ydy}{a}$ $= 2x + \frac{ydy}{a}$. Sintantochè dy non si annulla, sarà sempre z sottosecante, ed allora solo diventerà suttangente quando divenuta $dy = 0$, sia $z = 2x$. Quindi la ragion ultima, e geometricamente esatta di $dy : dx$ nella parabola è quella di $y : 2x$, la quale ci conduce a determinare la vera misura della suttangente.

La critica, che Ella fa al Newton mi sembra giusta giustissima.

Spero che si comincierà quanto prima a stampare in Firenze il mio Trattato di Contrappunto in due Tomi in 4to nel quale ho procurato di dedurre la Musica dai suoi veri principj, congiungendo la teorica colla pratica. Mi lusingo, che il giudicio del Pubblico sarà favorevole, essendo stato ben ricevuto il mio Saggio sopra le Leggi del Contrappunto, che è un compendio del suddetto Trattato.

In Padova è stata instituita una nuova Accademia di Scienze, a cui mi hanno fatto l'onore di ascrivermi tra gli Accademici onorarj. Si conservi in buona salute, mi onori de' suoi comandi, e mi creda Di V.S. Ill.ma

Al Sig. Pietro Giannini Treviso 26 Maggio 1774. Aff.mo Serv. ed Amico
Saguvia Giordano Riccati

quantità immaginaria ... una quantità reale? Ora che ciò sia [illegible], me ne sono convinto col seguente semplicissimo raziocinio.

quantità immaginaria m...
una quantità reale. Ora che ciò sia illusorio, mi sono
convinto col seguente semplicissimo raziocinio:

mou
en a
avec
a n
que
ene
tal
va
tal
tro
va
cha
tre
on
tai
Se
ond
pou
$\frac{\sqrt{-1}}{2}$
sie
ess
n
ris
ta
si
ad
que
un
co

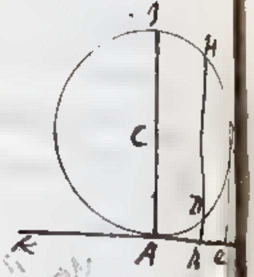
Illmo. Sig. Sig. Pne Colmo.

197

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo

[R]ispondendo alla pregiatissima sua degli 6. di Maggio, dico [ch]e essendo il suo problema un caso particolare del mio, e [ce]rcando ella soltanto la tangente dell'arco 15° uguale [a] $2-\sqrt{3}$, egli è patente che le altre due radici dell'equazione $x^3-3x^2-3x+1=0$ riescono inutili al suo in[te]nto. Ma il caso dell'Eulero è molto diverso. Col mezzo dell'equazione $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \ldots = 0$ va egli in traccia di tutti i valori di y, cioè a dire di li, e quindi le radici tutte della predetta equazione, che non ripugnano alla na[tura] della logistica, servono alla sua ricerca. L'afferma[zio]ne che consta essere $1+\frac{y}{n}$ quantità reale, è lo stesso che il ristrignere il problema, ed a riserva della ra[d]ice $li=0$, escludere tutte l'altre, il che è totalmente contrario all'intenzion dell'Eulero.

[Q]uanto ha asserito che nell'equazione $\frac{y}{n} = \text{Cs.}\frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm$ [...] $\text{Sc.}\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$ si possa negligentare la grandezza $\text{Cs.}\frac{2\lambda p}{n} - 1$, onde si abbia $y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$, in quanto che quest'ultima [for]mola si raccoglie dalla certissima equazioni $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{-1}\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)$. Considerata frattanto più maturamente la mia asserzione, m'avveggo essere concesso solamente il trascurare $\text{Cs.}\frac{2\lambda p}{n} - 1$, quando n è trascendentemente infinito, ed $= \frac{1}{0}$, dimodochè ne risulti $\text{Cs.}\frac{2\lambda p}{n} - 1 = \text{Cs.}\, 2\lambda p \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Nella lettera dei 20. Feb.° ha il Dottissimo Sig. Abate provato, che se si trascura una quantità reale minima rispettivamente ad una immaginaria, si può ancora negligere una quantità immaginaria minima relativamente ad una quantità reale. Ora che ciò sia illecito, mi sono convinto col seguente semplicissimo raziocinio.



Il circolo AEQ, il cui raggio AC = 1, sia riferito all'asse KG, e sia AB = x, $\left.\begin{matrix}BD\\BH\end{matrix}\right) = y$, e si avrà l'equazione $1 \pm \sqrt{1-x^2} = y$. Quando $x = AQ = 1$, si troverà $y = QE = 1$; ma posto $x = AG = 1 + dx$, ne proverrà $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{-2dx} = \sqrt{2dx}\sqrt{-1}$, e per conseguenza $1 \pm \sqrt{2dx}\sqrt{-1} = y$: ma l'ordinata, che corrisponde al punto G è immaginaria, perchè al di fuori del punto il circolo non si estende; dunque l'ordinata y è immaginaria benchè uguale alla quantità reale QE = 1 coll'aggiunta, o detrazione della quantità minima immaginaria $\pm\sqrt{2dx}\sqrt{-1}$; il che &c.

Torno a riassumere la formola $\frac{y}{n} = \text{Co.}\frac{2\lambda p}{n}.-1 \pm \text{Se.}\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, ed acciocchè possa ammettersi il metodo dell'Eulero, bisogna supporre n uguale all'infinito assoluto, onde sia $\text{Co.}\frac{2\lambda p}{n}-1 = 0$, e $\text{Se.}\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n} = \frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$, essendo sempre in tale ipotesi l'minimo in riguardo ad n.

In siffatta guisa dal metodo dell'insigne Scrittore si raccoglierà quella stessa equazione, che si deduce dalla formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{n}\, l\left(\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{-1}\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)$, cioè dire $y = l1 = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. Noti il mio Stimatissimo Sig. Abate, che non essendo esattamente la suttangente della logistica = 1, se non quando le flussioni del logaritmo, e del numero finalmente si annullano, allora solo il metodo dell'Eulero ci dà il giusto, quando discende all'infinitesimo assoluto la flussione $\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$.

Io mi terrei fortunato se potessi in qualche modo giovare alle sue profonde meditazioni, ed all'incremento dell'Analisi. Resto con pienissimo ossequio. Di V. S. Ill.ma

Treviso 4 Giugno 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli.
Roma.

Umil.mo ed Obblig.mo Servo
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo

Illmo Sig. Sig. Pne Colmo

Ho sempre avuto presente quanto V.S. Illma si è compiaciuta di significarmi rapporto ai miei dubbj; ma poichè ella mi consiglia di ripeter la lettura del suo foglio delli 17 Marzo, io lo farò, e lo farò colla possibile maggior attenzione, e posatezza. Se dopo di ciò i miei dubbj non si dilegueranno, la pregherò d'aver la sofferenza di dileguarmeli, ribattendo dimostrativamente con ella sol fare, qualunque mia difficoltà, e rischiarando quelle tenebre, che forse nella mia mente, le quali non mi hanno fatto finora discernere la verità. Mi riesce ben nuovo, che perchè la base logaritmica, e il logaritmo sono capaci d'infiniti valori, però ad un numero immaginario debba corrispondere un logaritmo reale. L'esempio, ch'ella apporta sarebbe di grandissima forza, se potesse essere la base $e\sqrt{-1}$, a cui corrispondesse per logaritmo l'unità; ma io son di parere, che ciò sia impossibile, come spero di dimostrare nel mio trattatello. Se la base è immaginaria debbono essere immaginarj i numeri de' logaritmi; come se immaginaria l'ascissa è immaginaria, reale debb'essere l'ordinata, e viceversa, e non può a meno di non farmi grande apprensione, ch'essendo $e\sqrt{-1}$ l'ascissa della logaritmica, ed 1 l'ordinata corrispondente, un'ordinata reale corrisponda ad un'ascissa immaginaria. Ma di ciò un'altra volta.

Nella mia lettera ... si aguagli all'infinito assoluto, acciocchè
necessario che n si aguagli dallo Eulero $(1+\frac{y}{n})^n = \pm 1$,
che si avveri la formola ... In questa ipotesi adunque
e che sia $y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. ... nella Lettera 19. Marzo.
si avverano la cosa da me scritta ... Di V.S. Illma
Sono col maggiore rispetto.
Treviso 11 Giugno 1779. Umil.mo ed Obbl.mo Servo
Giordano Riccati

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli
Roma.

Io mi consolo della nuova di Lei opera, la quale sarà degna veramente di
e degna de' più grandi encomj. La materia meritava di essere trattata
da un grandissimo meccanico, ed analista, com'ella è veramente.
In oggi molti si sono prediati di scuoprire le vere leggi di contrappunto, ma
con poco incontro. Tempo fa m'era avvisato a trovar le leggi degli accom
pagnamenti, che si danno alle note della scala; ma essendomi in
trato in gravissimi ostacoli per dileguare i quali richiedevansi molti deli
catissimi esperimenti, e gli trovai, che ~~molte~~ cose, ch'io avea notate eran
state avvertite da un tal P. Sacchi Milanese, ne abbandonai il pensiero.
Una di queste fu, che l'iperbola tra gli assintoti esprime le lunghezze
delle corde, e le loro vibrazioni rispetto alla corda fondamentale.
Io avrò un infinito piacere di leggere questa bell'opera, [illegible] per que
l'uno degli associati. Quando sarà stabilito il prezzo me ne avvisi, [illegible]
provvederemmo i frutti [illegible] di trovare altri associati.
[illegible] la sua pregiatissima grazia, ed ossequiosissimamente mi protesto

Di V.S. Illma

Roma 9 Giugno 1779

Umo, ed Obbmo Ser[illegible]
Geminiano [illegible]

Nella mia terza ... si agguagli all'infinito assoluto, accioc=
necessario che n si agguagli all'infinito assoluto, accioc=
chè si avveri la formola dello Eulero $(1+\frac{y}{n})^{n} = \pm 1$,
e che sia $y = \pm n\lambda p\sqrt{-1}$. In questa ipotesi adunque
si avverano le cose da me scritte nella Lettera 19. Marzo.
Sono col maggiore rispetto. Di V.S. Illma

Treviso 11 Giugno 1779.

Umil.mo ed Obbl.mo Servo
Giordano Riccati

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli
Roma.

BB

5

All' Illmo Sig.r Sig.r Pne Colmo

Il N. U. Sig.r Co: Giordano Riccati

Treviso.

Ill.mo Sig. Sig. Pron.e Col.mo 203

...ubbidire ai pregiatissimi suoi comandi, le comunicherò
le osservazioni da me fatte sopra la dottissima sua seconda
Lettera al Ch. Sig. Avvocato Cassiani. Per dirle il vero ciò
che ha soggiunto nella prima Lettera in risposta ad una

Ill.mo Sig. Sig. Pron.e Col.mo 241

...ci ho di risposta alla riputatissima sua dei 16 Mag-
gio.

...si può dare più esatta similitudine dell'egualità.
...essendo ambe le quantità $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{1}$ uguali a -1,
...passa fra loro perfetta similitudine. Aggiunge il Ch.
Sig. Abate, che ammessa l'analogia $1 : -1 :: -1 : 1$, si
dovrebbe accordare anche quest'altra $\sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{1}$,
la quale è patentemente falsa. Tutta la riflessione,
che una radice ha due valori; uno positivo, e l'altro
negativo; egli è d'uopo scegliere quei segni, che
salvano l'egualità delle quantità, onde per
esempio si abbia $-\sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{1}$.
...esempio ... Ella di-
...ce è verissimo stare $\frac{a^4}{0.0} : \frac{2a^3\sqrt{-1}}{0} :: a : 0.\sqrt{-1}$ ed io rispondo, che
...manda se 0.0 differisca da 0, ed io rispondo, che
... di $0 : 1$. Sostituis-
...ca $0.0 : 0$ si riferisca in ragione
...ca in cambio del nulla la quantità dx, e sarà
sempre $dx^2 : dx :: dx : 1$: ma quanto cala dx
altrettanto la ragione $dx : 1$ si accosta a quella
di $0 : 1$; dunque finalmente dx, quando $dx = 0$,
$0.0 : 0 :: 0 : 1$. Il nulla è capace di infiniti
...fattori, e nel nostro caso abbiamo 0.0, 0.1, dimo-
...Poichè i fattori dei due nulla sono come $0 : 1$
Nella mia lettera dei 4 corrente ho fatto vedere, esser
necessario che n si uguagli all'infinito assoluto, acciò-
chè si avveri la formola dell'Eulero $(1 + \frac{y}{n})^n = \pm 1$,
e che sia $y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. In questa ipotesi adunque
si avverano le cose da me scritte nella Lettera 19. Marzo.
Sono col maggiore rispetto. Di V. S. Ill.ma
Treviso 11 Giugno 1779 Umil.mo ed Obbl.mo Servo
Giordano Riccati
Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli
Roma.

obbedire ai pregiatissimi suoi comandi, le communicherò
le osservazioni da me fatte sopra la dottissima sua seconda
Lettera al Ch.mo Sig. Avvocato Cassiani Per dirle il vero ciò
che in seguente nella prima Lettera in risposta ad una

ubb
la a
Latt
che
obb
Insc
Tan
con
ant
ma
la
Vi
Tel
e c
tu
na
e a
usu
un
Ta
nec
neg
ma
vo
vo
cre
ga
nec
na
nav

Ubbidiente ai pregiatissimi suoi comandi, le comunicherò le osservazioni da me fatte sopra la dottissima sua seconda Lettera al Ch. Sig. Avvocato Cassiani. Per dirla il vero ciò che ha soggiunto nella prima Lettera in risposta ad una obbiezione presa dall'analogia $1:-1::-1:1$, non mi aveva lasciato contento. La proporzione geometrica ha per fondamento, che gli antecedenti egualmente contengano i conseguenti, e questa contenenza si trova dividendo l'antecedente pel conseguente. Quindi sarà geometricamente giusta l'analogia $1:-1::-1:1$; perchè $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}=-1$: lo stesso non si può affermare dell'analogia $\sqrt{1} : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \sqrt{1}$, quando tutti i radicali siano forniti del segno positivo; perchè $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$, $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=\sqrt{-1}$, e conseguentemente le contenenze non sono uguali. Quando le radici [hanno] due valori, uno positivo, e l'altro negativo, bisogna scegliere quelli, che rendono eguale la contenenza, il che si ottiene, quando o ai due termini estremi, o ai due medj si adattino i segni contrarj, come per esempio $1:\sqrt{-1}::\sqrt{-1}:-1$, $1:\sqrt{-1}::-\sqrt{-1}:1$. Detto inoltre, che se 1 ha qualche ragione a -1, non può esser questa, che ragione di egualità. 1 contiene negativamente una volta -1, ed 1 contiene positivamente una volta $+1$. Il contenere positivamente una volta esprime egualità, ma non così il contenere una volta negativamente.

Credo giusta l'idea, che i Geometri danno delle quantità negative, allorchè le asseriscono minori del nulla. Ma se è così, come può sussistere l'analogia $1:-1::-1:1$, e come mai un numero maggiore ad un minore può avere la stessa proporzione di un numero minore ad un maggiore? E'

addetta

pregiatissimi suoi comandi resto con profondo rispetto

Di V. S. Illma

Modena 19 Giugno 1779

Umilmo Devmo Servitore
Giuseppe Conarelli

adotta riflessione, che nella prova riguardo all'analogia $1 : -1 :: -1 : 1$, perchè in essa sono eguali le continue unico fondamento della ragione geometrica, sarebbe decisiva, se si trattasse di proporzione aritmetica, la quale cava la parità dalle differenze. Infatti siccome $1, 1, 1$ sonano aritmeticamente proporzionali, perchè sono eguali le differenze; così per l'opposto $+1, -1, 1$ non godono di questa prerogativa, perchè sono disuguali le differenze $+2, -2$.

Egli è verissimo che per esempio $\frac{1}{-1}$ può assomigliarsi al più che infinito, ch'io esprimo per ∞, e lo stesso dee affermarsi della quantità $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$. Il difficile consiste in determinare i casi, quando una grandezza apparentemente negativa debba porsi eguale al più che infinito. Per camminare sicuramente egli è d'uopo affidarsi alla scorta della geometria. Al punto T del circolo $AOA'O'A$ si intenda condotta la tangente TP,

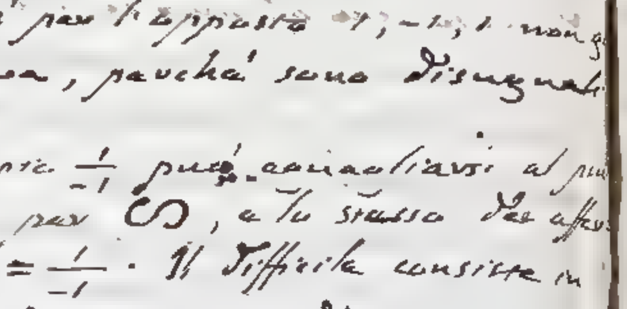


Fig. 1

e si avrà $CM : CT :: CT : CP$. Se il punto T cada in A onde $CM = 0$, ne nascerà $0 : CT :: CT : \frac{\overline{CT}^2}{0} = \begin{cases} AQ \\ AQ' \end{cases}$, non essendovi maggior ragione, che la tangente incontri l'asse PP' dalla parte delle assisse positive, piuttostochè da quella delle assisse negative. Sia T' il punto prescelto, e poichè nell'analogia $CM' : CT' :: CT' : CP'$ è certamente CM' un'assissa negativa, anche CP' dee considerarsi tale. Se CM è positiva, è unico il punto P dell'incontro della tangente coll'asse. Se $CM = 0$, sono due i punti degli incontri, potendosi concepire, che la tangente incontri l'asse in due punti P, P' inclusivamente

menta distanti dalla parte della assisse positiva, e imaginaria. Che se CM divien negativa, il punto dell'incontro torna ad esser verso dal canto della assissa negativa.

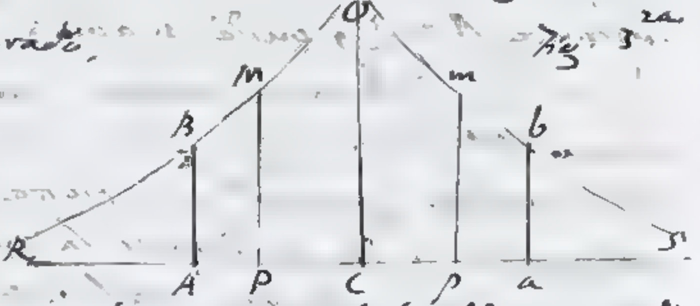
Nell'iperbola del terzo grado, 

Fig. 3ª

(la cui equazione $y = \frac{1}{a-x}$ nascente dal supporre $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$) quando io cerco l'aja nella circostanza di $x > a$, l'aja variabile, di cui vado in traccia, si è la $OCpm$, a cui dee intendersi aggiunta l'aja costante $BACO$. Ora $OCpm = OCS - mpS$: ma $OCS = \frac{1}{0}$, $mpS = \frac{1}{Cp} = \frac{1}{x-a}$, dunque $OCpm = \frac{1}{0} - \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0} + \frac{1}{a-x}$; e perchè $BACO = \frac{1}{0} - \frac{1}{a}$, ne risulta l'aja $BApmOB = \frac{2}{0} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a-x}$. Mettiamo la stessa cosa sotto un altro aspetto. Fatta adesso, $Cp = z$, si integri la formula $\frac{dz}{z^2}$, e si scoprirà $\int \frac{dz}{z^2} = A - \frac{1}{z} = A - Spm$. Il calcolo non può esser indovino, se da me per esempio si indaghi o l'aja $CpmO$, o l'aja $BApmOB$. Nella prima ipotesi debbo stabilire $A = SOC$; e nella seconda ho da determinare la detta costante $= SOBAS$. Lo svelare adunque il mistero, unicamente dipende dai diversi valori della costante aggiunta.

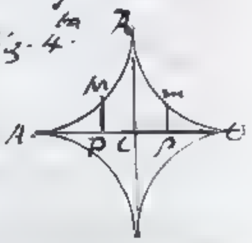


Fig. 4ta

Abbiasi l'equazione $dy = dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}} - 1}$ propria della curva, in cui $AC = 1$, $AP = x$, $PM = y$. L'elemento dell'arco $AM = dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}}$ si uguaglia, facendo $1-x = PC = z$, e $dx = -dz$, a $-dz\sqrt{z^{-\frac{2}{3}}}$, e per conseguenza l'elemento dell'arco RM si trova uguale a $dz\sqrt{z^{-\frac{2}{3}}}$, ed il suo integrale $\int dz\sqrt{z^{-\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} + A$. Se voglio trovare il solo arco RM, la costante A si uguaglia a nulla, e questo arco quando CP

pregiandomi suoi comandi resto con profondo rispetto

Di V. S. Ill.ma

Modena 19 Giugno 1779

Umil.mo Dev.mo Obbl.mo Servitore
Giuseppe Camarelli

CD = CA = 1, Divisione = RMA = $\frac{3}{2}$, e tale è parimente la misura dell'arco OmR. Ma se ho in animo di scoprire la grandezza dell'arco OmRM; devo aggiugnere la costante A = $\frac{3}{2}$, onde si abbia OmRM = $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$. Egli è facile da inferirne essere l'arco AM = $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$, e l'arco AMRm = $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$. Anche qui pertanto svanisce il mistero, quando si riflette alla costante da ommettersi, ovvero da aggiugnersi. Se indagassi la misura del solo arco Rm = $\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$, dovrei tralasciar la costante; ma cercando la rettificazione dell'arco AMRm = $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$, si rende necessaria l'aggiunta della costante $\frac{3}{2}$.

Lo stesso raziocinio si applica alla quadratura della parabola la cui equazione $z = y^3$, posti

AC = 1, CF = z, Cf = −z,
FG = y, fg = −y, AF) = x.
Af

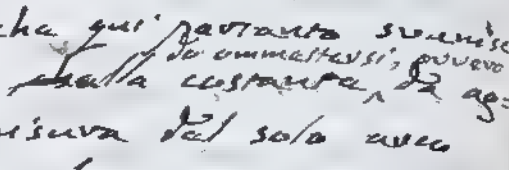


Fig. 5.ta

Scopriremo adunque CFG) = $\frac{3}{4}y^4$,
Cfg
CAB = $\frac{3}{4}$, ABGF = $\frac{3}{4}-\frac{3}{4}y^4$, ABGCgfCA = $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}y^4$.

Similmente sia l'iperbola dell'equazione $y = \frac{b^4}{z^3}$, in cui si sia stabilito AC = a, CP = z, Cp = −z, PM = y, pm = −y,
AP) = x; L'elemento dell'aja
Ap
ABMP è = $y\,dz = -\frac{b^4 dz}{z^3}$,
e quindi ABMP = $\frac{b^4}{2z^2}-\frac{b^4}{2a^2}$.

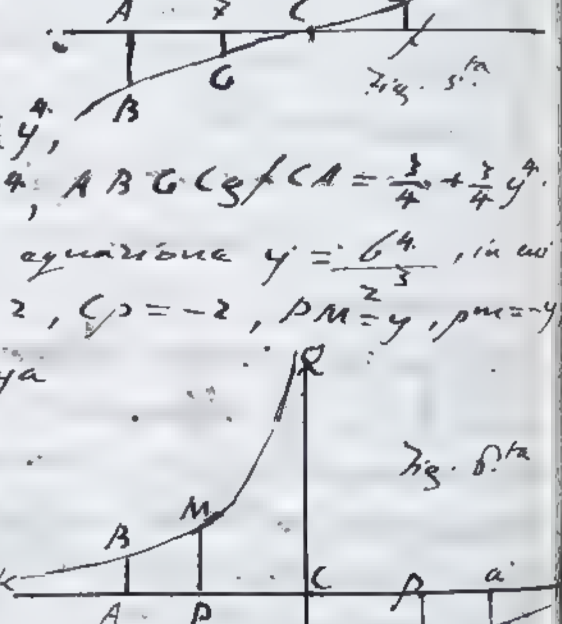


Fig. 6.ta

Quando CP = z = 0, scopriremo l'aja ABQC = $\frac{b^4}{0}-\frac{b^4}{2a^2}$.
L'elemento dell'aja pmqC si agguaglia a $-y.-dz = y\,dz = \frac{b^4dz}{z^3} = -1.-\frac{b^4dz}{z^3}$:
ma $S-\frac{b^4dz}{z^3} = \frac{b^4}{2z^2}$ = HGmp; dunque
$S\frac{b^4dz}{z^3} = A-\frac{b^4}{2z^2}$. Se è mia intenzione di trovare la sola

aja

ABQCqmp, dovrei porre $A = \frac{b^4}{0}$, onde ne provenga
$Cqmp = \frac{b^4}{0} - \frac{b^4}{2z^2}$; ma se pretendo di scoprire l'aja
ABQCqmp, è necessario che stabilisca $A = \frac{2b^4}{0} - \frac{b^4}{2a^2}$,
acciocchè ne risulti $ABQCqmp = \frac{2b^4}{0} - \frac{b^4}{2a^2} - \frac{b^4}{2z^2}$.
Avvertisca lo Stimatissimo Sig. Abate, che quando da me non si prenda sbaglio, le quantità negative non significano il più che infinito nei casi considerati. Le dimando dunque permissione di esporle un caso, nel quale il più che infinito si cela sotto l'apparenza di una quantità negativa. Si cerchi nell'ipotesi della forza in ragione inversa dei quadrati della distanza dal centro la sublimità, da cui dovrebbe discendere un corpo per acquistare una velocità, colla quale, cangiata che siasi da diretta che era in trasversale, il mentovato corpo descriva un'iperbola. La soluzione del problema ci insegna, che il mobile dovrebbe da principio collocarsi (Fig. 3.) alla distanza negativa Cp dal centro. Ora qui sotto l'apparenza di una grandezza negativa si nasconde una più che infinita sublimità. Posto in p il pianeta, le forze che sollecitano per la direzione CS, lo spingerebbero ad una infinita distanza pS, e gli farebbero acquistare la velocità $= \sqrt{2}\sqrt{mpS} = \sqrt{\frac{2}{b}}$, posta $Cp = -b$. Ma si dia per una specie di magia geometrica si dia supponendo porre il corpo trasportato da S in R colla velocità $\sqrt{\frac{2}{b}}$, dove attratto dalle forze, che ritengono la stessa direzione RS, seguiti ad accelerarsi sino al punto A, in cui sarà fornito della velocità $\sqrt{\frac{2}{b} + \frac{2}{a}}$. Se con tale velocità sarà scagliato il pianeta per una direzione […]

pregandola de' suoi comandi resto con profondo rispetto

Di V. S. Ill.ma

Modena 19 Giugno 1779

Umil.mo e Dev.mo Servitore
Giuseppe Conoarelli

direzione trasversale, per esempio AB, descriverà
un' parabola. In questo incontro il mobile è stimo-
lato dalle forze per uno spazio più che infinito =
$pS + RP$, e la sua primitiva distanza dal centro
non dee riputarsi negativa, ed uguale a Sp, ma
bensì più che infinita positiva = $CR + Sp$.

Nella sua umanissima degli 11. Maggio modestamente
si esprime di non essere affatto contento della secon-
da Lettera al Sig. Avvocato Cassiani. Se le mie rifles-
sioni potessero esser giovevoli per calmare le sue
dubbietà, mi chiamerei fortunato.

La Lettera all' Anonimo è distesa eccellentemente, ed
è generosamente ricolma di somma benignità per lo
stesso. Noto soltanto una minutissima cosarella. Ella
dice, che l'Anonimo confessa un abbaglio dalli Ab. Riccati
non avvertito dal valente Oppositore. Per verità il Sig. M.
Pessuti ha notato lo sbaglio, ma non ne ha indagato il mo-
tivo. Al fine del paragrafo, che comincia Non veggo, cosa
possano replicare gli oppositori, alle espressioni
e raddoppiando per più chiarezza sostituirei queste
altre e raddoppiando ognuna delle predette formole.

Il metodo delle flussioni del Newton è in sostanza lo stesso
con quelli delli esaustioni degli Antichi, e degli indivi-
sibili del Cavalieri, purchè in quest'ultimo siano mi-
nissime linee, superficie, o solidi gli indivisibili delle
predette quantità finite. Anche le flussioni del Newton
non deggiono essere determinate, ma bensì tendere
indefinitamente verso del nulla; e da ciò dipende la
geometrica esattezza del metodo Newtoniano.

Se il Newton abbia commesso errore intorno alla attrazione
della

della Terra sferoidica, all'altezza delle maree, alla figura della Luna, alla precessione degli Equinozj, dovrebbe essere maturamente esaminato, e questo esame sarebbe degno di Lei. Che il grande Inglese non sia caduto in petizion di principio, quando ha determinato la velocità, con cui si propaga il suono nell'aria, l'ho patentemente dimostrato nella mia Opera <u>Delle Corde</u> ovvero <u>fibre</u> elastiche. Sched. VIII., ed ho ciò maggiormente confermato nella Lettera inserita nel Tomo XII. di cotesto Giornale. Dopo un' invincibile dimostrazione, non so come il Sig. Abate Frisi possa perseverare nella sua opinione.

Ella mi comandi, se devo spedire le due Dissertazioni per la posta, o pur farle tenere ad un qualche suo Corrispondente in Venezia: ed intanto con pienissima stima e rispetto mi sottoscrivo.

Di V.S. Illma

Treviso 11. Giugno 1779.

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli
Modena

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

Pregiandomi de' suoi comandi resto con profondo rispetto

Di V.S. Illma

Modena 19 Giugno 1779

Umilissimo Divotissimo Servitore
Giuseppe Contarelli

Ill.mo Sig. Sig. Pron. Col.mo 213

Ill.mo Sig. Sig. e Pron. Col.mo 211

Ricevo la sua gentilissima quanto dotta e ... Obbligante per la briga, che V. S. Ill.ma si è presa non solo di esaminare minutamente la mia seconda Lettera, ma di notarvi ogni cosa non senza notabil fatica, e noja. Rendole pertanto infinite grazie per questo, e ancora per la risposta alla mia Lettera dei 24 Maggio. Le sue riflessioni mi pajono giustissime, e ne ricaverò maggior frutto, quando tornerò a meditarvi sopra con maggior agio. Frattanto debbo notificarle, che qui si sono stampate a parte molte copie delle Lettere sopra i Logaritmi de' numeri negativi, e più il Sig. Abate Tiraboschi mi ha dato la commissione di spedire a V. S. Ill.ma dodici di queste copie destinate a lei in regalo. Lunedì prossimo consegnerò l'involto alla Corriera di Venezia. Converrà poi, che ella si prenda l'incomodo di farlo riscuotere in Venezia dalla Corriera di Modena. In quella medesima occasione V. S. Ill.ma mi farà grazia, se spedirà le due scritture non a maniera di lettera, perchè dubito, che vi sia qualche ostacolo, e per evitare il pericolo, che vengan mandate per la posta, il che se avvenisse, costerebbe qui una spesa non indifferente. Anche le lettere vanno colla stessa Corriera, ma poi sono estratte non so dove e arrivano assai più presto, che la medesima barca. Sempre pronto a pregiatissimi suoi comandi resto con profondo rispetto

Di V. S. Ill.ma

Modena 19 Giugno 1779

Umiliss.mo e Dev.mo Servitore
Giuseppe Canoarelli

210

212

Ill.mo Sig. Sig. P.rone Col.mo

210

8 5 MODENA

All' Ill.mo Sig.r Sig.r e Pron Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

osservi con quale facilità da me si determinino gli accompagnamenti che competono alle note della Scala. E restringendomi al Modo per Terza maggiore, egli è facile da scoprire, che esprimendo i suoni coi numeri delle vibrazioni fatte in pari tempo, la serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 dinota l'ottimo consonante accompagnamento, che suol nominarsi di Terza maggiore, Quinta, e Ottava. Da questo ne derivano due: 3, 4, 5 di Quarta, e Sesta maggiore, collocata nel Basso continuo la Quinta dell'accordo fondamentale; 5, 6, 8 di Terza minore, e Sesta minore, posta nel Basso continuo la Terza maggiore del predetto accordo fondamentale. Ecco un esempio dei nominati accompagnamenti. C, e, G, c, e

e, G, c

G, c, e

Si concepisca ora adattato esempligrazia a C base del Tuono l'accordo C, e, G, c, e volendo cangiare accompagnamento, è cosa evidente, che i migliori passi, che posso movere, sono e l'ascendere, e il discendere per una Quinta, la qual discesa equivale all'ascendimento per una Quarta. In riguardo adunque all'accordo C, e, G fondato sulla base del Tuono i mentovati accompagnamenti saranno G, B, d; F, A, c. Dalla successione di questi tre accompagnamenti nasce la Scala del Tuono C per Terza maggiore, ed io ne metto sotto gli occhi l'origine

C e G

F A c

G B d

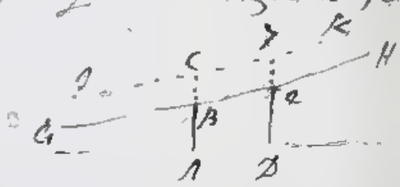
C D e F G A B c Scala prodotta dalla unione dei predetti tre accordi, usato l'unico artifizio di trasportare il suono d all'Ottava bassa.

Treviso 25. Giugno 1779

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Cantarelli
Modena.

Umil.mo Divot.mo Servitore e Collega
Giordano Riccati

Gli accompagnamenti convenienti alle note della Scala sono un corolla[rio] della origine, che ne ho descritta. A C principalmente compete l' accordo C, e, G di Terza maggiore e Quinta. Come Quinta di F conv[ien]e altresì l'accordo C, F, A di Quarta e Sesta maggiore. D Quinta di G richiede l'accompagnamento D, G, B di Quarta e Sesta maggiore derivato da G, B, d; e se a questo accompagnamento si aggiunga la Settima minore f; a D si adatta l'accordo D, F, G, B di Terza minore, Quarta, e Sesta maggiore, che frequentissimamente si adopra. Ad e Terza maggiore di C conviene l'accordo e, G, c di Terza e Sesta ambe minori. F richiede l' accompagnamento F, A, c di Terza maggiore e Quinta, ed un sim[ile] accompagnamento G, B, d dimanda G, che come Quinta di C parimente riceve l'accordo G, c, e di Quarta e Sesta maggiore. A Terza maggiore di F esige l'accompagnamento A, c, f di Ter[za] e Sesta ambe minori: Un accordo simile B, d, g vuole B Quin[ta] Terza maggiore di G, che aggiunta a G, B, d la Settima minor[e] f, prende l'aspetto B, d, f, g di Terza minore, Quinta di[...] ~~minorita~~ minore, e Sesta minore. Questi sono gli accompagnamenti, che principalmente competono alle corde della Scala, le quali ne ammet[tono] secondariamente ancora degli altri per quelle ragioni, che io spiego nel mio Trattato.



Abbiasi la logaritmica G B e H, in cui sia AB = 1 protonumero, De = a base, che richieda il logaritmo AD = 1. Ella consente, che il protonumero, e la base possano ammettere i valori $\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$ :: ma $1 : a :: \sqrt{-1} : a\sqrt{-1}$, e due coppie di numeri geometricamente proporzionali rinchiudano il medesimo logaritmo. Dunque

Dunque supposte $AC = \sqrt{-1}$, $DF = e\sqrt{-1}$, ad una tal base converrà quello stesso logaritmo $AD = 1$, che conviene alla base $DE = 1$; il che ec. Quando sarà stabilito il prezzo della mia Opera, non mancherò di avvisarla, e pieno di debito per la benigna dispensazione, che ha di scrivermi, colla dichiarazione di vera stima mi sottoscrivo

Di V.S. Ill.ma

Treviso 25. Giugno 1779

Ill.mo Sig. Savonio Maria Caldani
Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Treviso 25. Giugno 1779

Roma

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli
Modena.

Umil.mo Divot.mo Servitore ecc.
Giordano Riccati

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo 217

...o fatto fare dalla mia Servitura un Involtino, che spedisco a Venezia, acciocchè siano consegnati alla Corriera di Modena, dalla quale Ella le riceverà franche di porto. La prego dei miei divoti ringraziamenti allo stimatissimo Sig. Ab. Tiraboschi per le [illegible] copie regalatemi delle Lettere sopra i logaritmi dei numeri negativi. Ho dato ordine, che siano riscosse in Venezia dalla Corriera di Modena, e quanto prima le avrò in Treviso.

...prego ad esaminare nel Tomo V. delle Accademia di Turino il seguente passo, che comincia al fine della pag. 20. Si équation $z = \varphi(x^2+y^2)$ est celle de toutes les surfaces des révolutions &c. Fatti $z = \frac{x^2}{a}$, $y = mx$, $\frac{x^2}{a}$ dovrebbe essere la superficie di un paraboloide; il che io non trovo vero, dandomi il calcolo la detta superficie =

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}a.(1+m^2)+\frac{x^2}{a}\right)\sqrt{\frac{1}{4}a^2(1+m^2)^2+x^2(1+m^2)}-\frac{a^2(1+m^2)^2}{12}.$$

...lla mi conservi la sua pregiatissima grazia, e mi creda a tutta prova

Di V. S. Illma

Treviso 25. Giugno 1779

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli
Modena.

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

216

216

no. n por.

ne pi

ino. A me

e T. un

e Divini

h, dove

, questa e

a Dimostr.

el Lique

Meridi.

$\varphi = \frac{l}{a(m^2+1)}$

dal parag=

zione

ovo cosi

x^2 mi dà

$\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$

nova

esso

la

Di

nd

zione

re

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Col.mo

Accuso le sue gentilissime dei 25 Giugno, e 6 Luglio, che ho ricevuto franche di porto. Rendo a V. Ill.ma le dovute grazie, e poi rispondo alle istanze fattemi per ulteriori suoi comandi.

Ho letto ed esaminato il passo indicatomi nel Tomo V dell'Accademia di Torino. A me pare che l'autore intenda a dire non che $\frac{x^2}{a}$ della [illegible] la superficie d'un conoide; ma che fatto $z=\frac{x^2}{a}$, e $y=mx$ l'equazione $z=\varphi(x^2+y^2)$ diviene $z=\frac{x^2+m^2x^2}{a(m^2+1)}$; la quale equazione è alla superficie di un paraboloide, giacchè se si faccia $\frac{x^2}{m^2+1}=p^2$, $\frac{m^2x^2}{m^2+1}=q^2$, avremo $az=p^2+q^2$ ma questa equazione appartiene alla superficie di una conoide parabolica, come lo dimostra il Sig.r Clairaut nel suo Trattato delle curve a doppia curvatura. Dunque l'equazione generale $z=\varphi(x^2+y^2)$ che appartiene a tutte le superficie nate dalla rivoluzione di una qualunque curva intorno ad un asse; per la determinazione di $\varphi=\frac{1}{a(m^2+1)}$ prodotta dai valori di $z=\frac{x^2}{a}$ e di $y=mx$ diviene equazione particolare del paraboloide che nasce dalla revoluzione della parabola espressa dall'equazione $az=x^2$ intorno all'asse delle z. Il valore poi della superficie io trovo così. Assunta la formola generale delle superficie $\frac{2p}{r}\int x\,ds$ l'equazione $az=x^2$ mi dà $ds=\frac{2dx}{a}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$. Quindi $\frac{p}{r}\int x\,ds = \frac{p}{r}\int\frac{2x\,dx}{a}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{2p}{3ra}\left(\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{a^3}{8}\right)$; e sostituendo in luogo di x^2 il suo valore $\frac{x^2+m^2x^2}{m^2+1}$ avremo

[illegible]

[illegible] nora

Umil.mo, ed Obblig.mo Serv.re [illegible]

Petronio M.a Caldani

$$\frac{p^2}{r}\int x\,ds = \frac{\frac{2p}{3ra}\left(\frac{\left(x^2+m^2x^2+\frac{a^2}{4}(m^2+1)\right)\sqrt{x^2+m^2x^2+\frac{a^2}{4}(m^2+1)}}{m^2+1} - \frac{a^3(m^2+1)}{12}\right)}{m^2+1}$$

Quanto poi alle riflessioni da lei fatte su quelle mie dimostrazioni, io convengo con lei che se vogliasi comparare i valori delle costanti nelle due diverse ipotesi di $x < a$, e di $x > a$ riuscirà tutto il mistero, ma la difficoltà si è, che nelle integrazioni si è supposto, che l'integrale svanisca quando $x = 0$. Quindi l'integrale è sempre $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$ per qualunque valore si dia alla x; ma se $x < 2a$ l'integrale è finito, e negativo, dunque non esprime [illegible] e positivo, che è quello, che si cerca. Questa è la ragione, per cui mi è paruto che $\frac{1}{a-x}$ debba avere un valore più che infinito. Prendo la sua formola generale $A = \frac{1}{z}$, e determino la costante col mezzo del valore di $z = -a$ ottengo $\frac{1}{a} - \frac{1}{z}$, la qual formola si riduce [illegible]. Dunque la difficoltà sussiste ancora, quando alla $\frac{1}{-z}$ non voglia costituirsi un valore più che infinito. Lo stesso dicasi delle altre formole.

Frattanto la ringrazio di aver [illegible] alla mia risposta alla lettera data dall'Ill.mo Abate [illegible] Ill.mo [illegible] Abate Vincenzo, giacché penso, ch'ella avrà veduto il giornale, che io ho già [illegible] stesso [illegible] e mi pregi de' suoi comandi

Di V. S. Ill.ma

Modena 6 Luglio 1774

Umil.mo e Dev.mo Servo
Giuseppe Cocconcelli

imodare

mora

Umo, ed Obbmo Servre

Petronio M.a Caldani

All'Nobile Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia   Trevigo

50
27

Illmo Sig. Sig. Pdrone Colmo — 223 29

... dal sasso. di cui le ho scritto. Ella ha

221

Illmo Sig. Sig. Pdron Colmo

Rendo distintissime grazie a V.S. Illma di avermi dichiarato come si determinino gli accompagnamenti, che convengono alle note della Scala, e desidero sommamente, che presto esca l'Opera sua per ammirare la maestria colla quale tratta questa sì inviluppata materia, e che è stata la sorgente di tanti contrasti, e di tante strane proposizioni. Il Sig. Abte Eximeno, che nel 1774 pubblicò un bel volume sull'origine della musica, e sopra il contrappunto sarà uno gli primi degli associati per la stampa della d.a di Lei Opera e due altri Sig.ri Inglesi; de' quali le farò avere i nomi, e cognomi quanto prima. Non lascierò di procurar d'accrescere il numero degli associati, e ne farò le pratiche opportune.

Quanto Ella soggiunge in fine della sua pregiatissima rapporto ai Sgaitoni non mi convince; e mi riserbo ad altro tempo di dirlene le ragioni. Io sono stato, e sono così affollato ora da diversi intrighi, che è un poco tempo, che non ho potuto proseguire il mio trattatello. Spero però d'esserne libero. Ella mi continui la pregiatissima sua grazia, e sono con tutto l'ossequio

Di V.S. Illma

Roma 8 Luglio 1774

Umo, ed Obblmo Servre
Petronio M.a Caldani

[illegible]

[illegible]

[illegible]

, il mecanismo dal nasso, di cui le ho scritto. Ella ia

ichi egua

lispittul

el Ill.mo

impho.

i è cui on

mi Ill.mo

imostrare

no assioi

e l'angolo

'obtuso

ima som

e è maggio

nto 7 me

rede su

zione

CAL

i verra

guale

mma

mora

'esso

iore

$\frac{2}{0}$; so

ione

BR

H

All'Illmo Sig: Sig: Pne Colmo
Il N. H. Sig: Co: Giordano Riccati

Treviso.

...ella spiegazione del passo, di cui le ho scritto Ella sia veramente penetrata la mente dell'Autore, ed io resto pienamente appagato.
... nell'ipotesi di $x > a$ fosse più che infinita la quantità $\frac{1}{a-x}$, la sua integrazione, e la mia dovrebbero esser uguali, onde si avesse $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = \frac{a}{0} + \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$. Nella sua integrazione Ella considera $\frac{1}{a-x}$ grandezza più che infinita, e nella mia io la suppongo quantità negativa, e questa supposizione richiede l'aggiunta della costante più che infinita $\frac{a}{0}$. Or ecco la maniera di conciliare le due sentenze. La quantità $\frac{1}{a-x}$ può fare la doppia figura di più che infinita, e di negativa. Nella prima ipotesi non c'è bisogno di nuova aggiunta di costante; nella seconda egli è d'uopo aggiungere la costante più che infinita $\frac{a}{0}$; ...oiché $\frac{1}{a-x}$ presa in qualità di più che infinita, si uguaglia alla costante più che infinita $\frac{a}{0}$ meno la quantità finita $\frac{1}{x-a}$. Vegga lo stimatissimo Sig. Abate se questa riflessione ottenga il fine di svelare il mistero.
...letto con somma mia obbligazione, e piacere la sua bella, e convincente difesa dell'Ab. Vincenzo mio fratello. La proprietà dell'elisse, che sia sempre costante la somma delle due linee condotte dai fochi a qualsivoglia punto dell'elisse stessa, è talmente nota

...ire le sue parti ...
...l caso irreducibile. Nelle Memorie dell'Accademia ...eggia di Parigi il celebre Sig. Nicola dimostra, che le tre radici dell'equazione $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{4p}{3}}$ si possono esprimere

...i segna, ...rispettivi ...il cui ...in p... ...i cui ...ve i più ...mostrare ...necessar ...l'angolo ...verticale ...ima som... ...è maggio... ...nto 7 me ...ordissim... ...izione ...AL ...averne ...quale ...mma ...mora ...esso

224

nota, che poteva dal pari venire in mente al Cavalier ed a mio Fratello per servirsene nella soluzione del noto problema. Ella nota per altro ottimamente, che il vario giro delle due soluzioni apertamente dimostra la loro diversità. Io tengo per certo, che mio Fratello o non avesse letto la soluzione del Cavalieri, o se n'era essa dimenticato; ed anzi non avendo trovato fra i suoi libri le Esercitazioni Geometriche, opera assai rara, inclino a credere, che non l'abbia mai letta affatto. Dopo averla molto cercata, l'ho finalmente trovata nella Biblioteca di S. Giustina in Padova, e prima apparteneva alla Libreria del Mar. Poleni, di cui que' Monaci hanno fatto l'acquisto. Resto col maggiore rispetto porgendole i dovuti ringraziamenti pel Giornale speditomi cortesemente.

Di V. S. Ill.ma

Treviso 16 Luglio 1779

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli
Modena

Umil.mo e Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

ve la sua parte immaginaria,
il caso irreducibile. Nelle Memorie dell'Accademia
Regia di Parigi il celebre Sig. Nicole dimostra, che
le tre radici dell'equazione $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{np}{3}}$ si possono
esprimere

Molto Rendo Ptre Sig.re Sig.re Prone Colmo 225

...endomi capitato alla mano il bel Saggio Analitico di V. R. sopra il metodo del Cardano, l'ho letto avidamente, ed ammirato con sommo piacere. Egli è infallibile, che se si risolve la formola $x^3 - px + q = 0$, la radice $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3})}$ si divide in due parti reali, la prima ha da essere o maggiore della seconda, o almeno ad essa uguale. Nella prima ipotesi è $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, e l'equazion è fornita di due radici immaginarie, e di una reale. L'ipotesi seconda richiede $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, e compone l'equazione di tre radici reali, fra due delle quali passa eguaglianza. Si danno frattanto infinite cubiche equazioni, che constano di tre radici reali, ed ineguali, e per accomunare a queste la formola Cardanica, si rende necessario che sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, acciò le mentovate due parti divengano immaginarie, onde si abbia $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{-1}\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{-1}\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)})}$. Ora quantunque ambe le parti siano immaginarie, la loro somma, o sia la radice x è reale, il che manifestamente si scopre trasformando le due radici cubiche in due serie, nella somma delle quali spariscono gli immaginarj. ~~nella somma delle due serie riescono divergenti,~~ Nel caso irreducibile ~~le due~~ ... si posciono l'aggregato delle due serie riesce una progressione divergente, che non può sommarsi; e perciò l'estendere la formola Cardanica al predetto caso, non reca alli Analisi veruna utilità.

... supposizione per altro di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, benchè ci dia sempre le due parti immaginarie, non ci guida costantemente al caso irreducibile. Nella Memoria dell'Accademia ... di Parigi il celebre Sig. Nicole dimostra che le tre radici dell'equazione $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$ si possono esprimere

esprimere in guisa, che non vi apparisca in esse alcuna quantità immaginaria. A questa equazione corrisponde la seguente formola Cardanica

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}\right)}.$$

L'Ab. Vincenzo Riccati mio fratello nel Tomo I. de' suoi Opuscoli valendosi di un metodo di sua invenzione, ha provato

$$\sqrt[3]{\left(\frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}\right)} = -\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}\right)} = -\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}}\sqrt{-1}.$$

Il perchè

$$x - 2\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt[3]{\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = 0,$$

come avea parimente scoperto il Sig. Nicola. L'altre due radici sono $x + \sqrt{\frac{p}{2}} \mp \sqrt{\frac{p}{2}} = 0$. Si attendava dunque la formola del Cardano al caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, che richiede la divisione della radice x in due porzioni immaginarie, si sperimenta in infinite circostanze fruttuoso; e ciò tanto più, che il mentovato mio fratello risolve col suo metodo l'equazione più generale $x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left(\frac{3n^2-1}{(1+n^2)\sqrt{1+n^2}}\right) = 0$, che si riduce a quella del Sig. Nicola, ponendo $n^2 = 1$. ~~Anche il Ch. Sig. Colonnello Anton Mario Lorgna ha altresì provato in una Dissertazione spedita alla Accademia Bolognese~~ Trova egli la radice Cardanica $x - 2\sqrt{\frac{p}{3\cdot 1+n^2}} = 0$, e l'altre due radici $x + \sqrt{\frac{p}{3\cdot 1+n^2}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = 0$. Anche il Ch. Sig. Colonnello Anton Mario Lorgna ha provato in una Dissertazione spedita alla Accademia Bolognese, che si può risolvere l'equazione $x^3 - px \pm \frac{p}{n}\left(\frac{n\mp 1}{n}p\right)^{\frac{1}{2}} = 0$, senza che le radici vengano turbate dalla quantità immaginaria. La formola del Sig. Nicola è un caso particolare di questa

a

[illegible]
e nasca dall'attenersi ai segni superiori, e dal metterv $n=3$.

Se la formola Cardanica è inutile per ottenere analiticamente le radici libere dalle quantità immaginarie nel caso irreducibile, si sperimenta essa assai vantaggiosa somministrandoci col mezzo della costruzione geometrica le tre radici reali dell'equazione $x^3 - px + q = 0$.

Nell'Opuscolo IV. del citato Tomo I. di Opuscoli ne dà il fratello la costruzione seguente. Chiamato φ un arco di cerchio il cui raggio $= r$ egli è noto essere

$$2Cc.\frac{\varphi}{3} = \frac{(Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi)^{\frac{1}{3}} + (Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi)^{\frac{1}{3}}}{r^{-\frac{2}{3}}}$$

Questa formola è simile alla Cardanica

~~$x = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}\right)}$~~

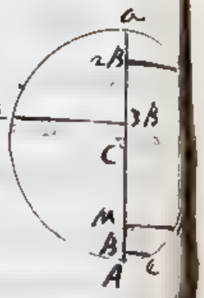
$$x = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{-1}\sqrt{\left(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{-1}\sqrt{\left(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2\right)}\right)}$$

Si faccia dunque $\frac{1}{2}q = \frac{Cc.\varphi}{r^{-2}} = r^2.Cc.\varphi$, $\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)} = \frac{Sc.\varphi}{r^{-2}} = r^2.Sc.\varphi$, e ne proverrà $\frac{1}{4}q^2 = r^4(Cc.\varphi)^2$, $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2 = r^4(Sc.\varphi)^2$ e per conseguenza $\frac{1}{27}p^3 = r^4\left((Cc.\varphi)^2 + (Sc.\varphi)^2\right)$: ma $(Cc.\varphi)^2 + (Sc.\varphi)^2 = r^2$; dunque $\frac{1}{27}p^3 = r^6$, e finalmente $r = \sqrt{\frac{1}{3}p}$. Avremo pertanto $x = 2Cc.\frac{\varphi}{3}$, e quindi $\frac{1}{2}x = Cc.\frac{\varphi}{3}$, purchè il seno tutto sia $= \sqrt{\frac{1}{3}p}$; e $Cc.\varphi = \frac{1}{2}q$.

Da ciò che si è detto deriva chiaramente la costruzione. Descritto il circolo, il cui seno tutto o raggio $CA = \sqrt{\frac{1}{3}p}$, si prenda $CM = \frac{1}{2}q$, e si conduca il seno MN, onde si abbia l'arco $AN = \varphi$. Si divida questo in tre parti uguali, e

la

la prima delle quali sia $Aa = \frac{1}{3}q$. Descritto il seno aB, si determinerà il coseno $CB = \frac{1}{2}x$.



Il coseno CM non appartiene soltanto all'arco $AN = q$, ma si approprìa altresì, chiamata c la circonferenza del circolo, agli archi $c+q$, $2c+q$ &c., che divisi in tre parti ci somministrano gli archi $A2a$, $A3a$ &c., i di cui coseni $C2B$, $C3B$ s'eguagliano alle ~~altre due~~ metà delle $\frac{1}{2}x$ delle altre due radici della nostra equazione $x^3 - px + q = 0$. Chi s'inoltrasse agli archi $3c+q$, $4c+q$, $5c+q$ &c. non troverebbe nuova radice, ma tornerebbe ad incontrare la già scoperta. Ne raccolga V. R., che la costruzione geometrica della formola Cardanica nel caso irreducibile determina le tre radici reali dell'equazione $x^3 - px + q = 0$; le cui metà sono CB, $C2B$, $C3B$, e che quell'apparenza d'immaginario, da cui non sa liberarsi, ^frettolosamente^ l'Analisi, la fa dileguare la Geometria.

Io mi confido che V. R. sia per gradire le riflessioni, che mi prendo il coraggio di rassegnarle, mosso dalla stima che ho concepita del suo sapere leggendo il dottissimo Saggio Analitico, che ha comunicato al pubblico, e supplicandola ad accettare l'offerta della mia servitù con pienissima stima e rispetto mi sottoscrivo

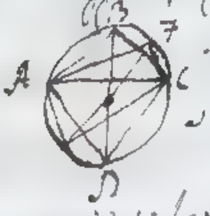
Di V. R.

Treviso 26 Luglio 1779

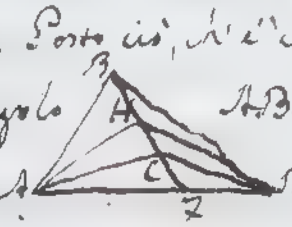
Molto Rev. P. D. Pietro Cossali C. R. Teatino
Padova. Venezia

Divot.^mo^ Obbl.^mo^ Servitore
Giordano Riccati

Nella mia Risposta in difesa del Ch.mo Conte Abate Riccati, che V.S. Ill.ma si è degnata di aggradire, ho commesso un errore che voglio correggere ora che il ch.mo P. Frisi mi faccia un rimprovero. Ho detto che se l'angolo ACB è minore di 120° il diametro del quadrangolo infinitesimo sarà minore de' lati che formano l'angolo. Or questo non è vero universalmente. Se i lati sono eguali la proposizione è vera: Ma se i lati son disuguali, vi sono due casi a considerarsi. L'angolo minore di 120° può essere maggiore, o pure minore di un retto. S'è minore, è facile a dimostrare ~~che ...~~: Ma s'è maggiore, il diametro del quadrangoletto può essere maggiore, eguale, e minore della somma dei lati. Nel circolo ABCD sia l'angolo



ABC alla circonferenza maggiore di 90° e minore di 120., e il vertice si faccia scorrere per ~~l'arco~~ ABC, il punto B darà la massima somma dei lati AB, BC, e il punto C la minima: Ma la massima somma è maggiore del diametro BD, la minima è minore: dunque deve esservi un punto F medio, in cui la somma AF+FC = BD. Posto ciò, si è chiarissimo io vorrei sciogliere il seguente problema: Nel triangolo



ABD data di posizione la retta BF, ~~trovare la minima~~ somma BC+AC+DC. Ma hoc opus, hic labor. Se l'angolo ACD è di 120°, e la retta BCF lo taglia inegualmente, il punto C non darà la minima somma, la quale deve andar decrescendo verso H. Se l'angolo AHD è retto, la somma

... persona di V.S. la grata memoria che egli serba indelebile dei favori dalla bontà sua verso

12.3 O

dèa, avvicinandosi d'avvicinarsi andando oltre C. Sempre la minima somma s'avrà nel punto di mezzo tra H, e C. Ma io non so trovare un metodo spedito, e semplice di determinarlo. Io tralascio di scioglier questo problema col mostrare qual è quel mini[mo] che ci presenta il caso, in cui essendo l'angolo ACB minore di 120.° la differenziazione della somma AC + BC + DC = 0.

Egli è verissimo, che $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = \frac{2}{0} \pm \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$; sicchè nell'ipotesi di $x > a$, nel primo caso $\frac{1}{a-x}$ faccia la figura di quantità positiva più che infinita, e nel secondo quella di quantità negativa. Questo appunto è ciò che discende dal mio discorso fatto in risposta all'obbiezione del Sig. d'Alembert, il quale trova la somma de' due Integrali parziali $= \frac{2}{0}$. Ora aggiungo, che se $\frac{1}{a-x}$ si volesse considerare quantità finita negativa, la $\frac{1}{-a}$ dee far la figura di quantità più che infinita. Così se nella formola $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$ si vogliono considerare ambi i termini di valor finito, l'Integrale esprimerà gli spazj più infinitamente lunghi, ma eguali ad uno spazio finito; se uno de' termini qualunque si vorrà considerare più che infinito positivo l'Integrale rappresenterà il [illegible] so dell'intera area iperbolica. Ella dice, che nell'ipotesi di $x > a$ l'asse variabile [illegible] al centro. Ora questo mi pare, che avrebbe bisogno d'illustrazione, perchè forse sarebbe[vi] no un più chiara soluzione.

Io sono d'opinione, che l'immortale suo Fratello abbia veduto l'Esercitazioni del Cavalieri, perchè era amico del P. Riccioli. Quindi mi pare impossibile, che il libro stampato in Bologna [illegible] nella camera del Professore di S. Lucia, nella quale si trovavano i libri, e le macchine del P. Riccioli [illegible]

D.V.S. Ill.ma Treviso 20 Luglio 1779

Umil.mo e Obb.mo [illegible]
Giuseppe Coss[ali]

Molto Rev.do P. D. Pietro Cossali C. R. Teatino
Padova . ~~Venezia~~

Divot.mo Obbl.mo Serv.e
Giordano Riccati

... persona di V. S. La grata memoria

che egli serba indelebile dei favori dalla bontà sua verso

6

VENEZIA

Al Nobile Sig.r Sig.r e Pron Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Molto Revdo P. D. Pietro Cossali C. R. Teatino
Padova - ~~Venezia~~

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Nobile Sig.r Conte Padrone Colmo 231

S. Simone e Giuda Padova
22 Luglio 1779

Mi è pervenuta a 16 del corrente la graziosissima e sapientissima lettera di V. S. La festiva Predicazione ed altri miei Religiosi uffizj non mi hanno permesso di applicarmi tosto a rispondere alle perspicacissime sue riflessioni. Ora si presenta a V. S. la prima parte delle mie risposte e succederanno le altre colla sollecitudine maggiore combinabile con due Prediche Dominicali e col Panegirico di S. Gaetano che mi sono alle spalle. Sto lavorando un opera completa sulle equazioni di terzo grado una parte della quale sarà istorica. Gli autori a me noti sinora che han trattato del caso irreducibile sono: Bombelli, Wallis, Leibniz, Koenig, Nicole, Clairaut, Marzagaglia, Venini, Alembert, Frisi, Radicati, Lorgna. Se Ella avesse notizia di qualche altro mi sarà somma grazia a communicarmelo. Tengo ordine dal Sig.r Lodovico Venezze mio cugino di attestare alla persona di V. S. la grata memoria che egli serba indelebile dei favori dalla bontà sua verso

232

di lui adoperati così in Treviso. Io non mi riconosco per alcun
modo degno dell'amicizia alla quale la sua umanità mi
ha aperto l'adito onorevolissimo. Prego V.S. a porgermi occa
sione di rendermene per qualche parte meritevole in avve
nire coll'ingiugnermi i suoi comandi i quali serviranno
a comprovare quei sentimenti di somma distinta che le protesto
con titoli sinceri di:

Umil.mo Div.mo Obbl.mo Ser.
Pietro Cossali C.R.

vo
pie
ra
sco
ion
e s
na
zza
yezz
omm
ncor
che
ond
nerr
ssim
aro
sue
ua
on

...vo stimare illustre sorte per il mio saggio Analitico l'essere ...pitato tra le mani d'un tanto Analista qual'è V. S. Lavi...tta onde lo ha letto fu un effetto dell'animo suo per ...scoperte Analitiche interessantissimo. Le lodi colle quali ...son da Lei onorato io son costretto a riguardarle co... ...e sentimenti più che del merito dettati dalla sua Uma...nità. Le riflessioni fatte nella sua mente portano il ca...rattere del suo genio accostumato a contemplare gli ...oggetti in tutti i punti di vista. La sua benignità in ...communicarmele con privata sua lettera è un saggio ...sincero di quella amicizia che V. S. si degna d'offrirmi ...che io non posso non avere a sommo pregio. I doveri ...portanto d'una letteraria amicizia e della stima ...meritata dalla sua persona per ogni titolo ragguardevo...lissima saranno mie leggi inviolabili nel rispondere che ...farò in questa ed in altre lettere alle sue Riflessioni ...sua prima riflessione si è come da me dimostrandosi che ...uatora la costituzione dell'equaz. (e) $x^3 - px - q = 0$ tale ...ponga che sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ ne nasce che la formola (ε)

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} = 0$$

stesso la Persona, a cui ... , ... contare ... ...novar dell'Opera stessa.

involge un'assurda violenza fatta alla natura delle reali

radici; contuttociò essa formola riesce utilissima in infiniti

casi dello stesso supposto $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ somministrandoci le

reali inuguali incommensurabili radici dell'equaz. (B)

$x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right) = 0$ La prima delle quali

va ad esser espressa per la formola (R)

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right) + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{-1}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right) - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{-1}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right)} =$$

che poi si riduce alla formola (S)

$$x - \sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} + n\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}}\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} - n\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} = 0$$

e finalmente alla formola (T) $x - 2\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} = 0$

e quindi le altre due radici $x = +\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}}$

Siccome nel tom. I de' suoi opusc. con un metodo quan-

to più semplice altrettanto più elegante e più ammirabi-

le ha dimostrato il Co: Ab. Vincenzo suo fratello bene-

merito in ogni ramo d'Analisi ma singolarmente in

quello delle equazioni la formola Cardanica per lui fu-

ro esser poteva creso, benemerito della Geometria per il

calcolo de' seni circolari ed iperbolici calcolo il più confor-

me alla natura Geometrica che consiste in relazioni di posiz-

di grandezza; benemerito della fisica per il principio delle azioni da lui acutissimamente sostenuto ed alla meccanica in luogo di quello delle semplici velocità felicemente applicato.

Domando a V.S. licenza d'incominciare da una osservazione tuttochè superflua per lei importante però preliminare delle altre.

Osserv. 1ª Il Cardano nel capo 1° de Regula Aliza si accigne a ricercar i vari modi di trovar l'estimazione (la radice) del capitolo (dell'equazione) del cubo eguale alle cose ed al numero; e questo capitolo od equazione in odierna espressione analitica altro non è che $x^3=px+q$ o sia $x^3-px-q=0$; e formando questa l'oggetto del mio opuscolo cioè della mia illustrazione di Cardano ne segue necessariamente che la lettera q sebbene indeterminata riguardo a qualunque numero non si estenda però a rappresentar quantità irrazionali ma alle razionali si ristringa. Non uno dunque ma due sono i costitutivi da considerarsi nell'equaz (A) posti i quali la formola (C) involge secondo la mia dimostrazione un'assurda violenza fatta alla natura delle reali radici 1° che q sia razionale, 2° che $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$. L'equazione (B) scoperta dal profondo analista suo fratello manca del primo costitutivo e perciò è diversa da quella considerata dal Cardano e dietro i suoi vestigi da me nel saggio;

stesso la Versoria, a cui [illegible], [illegible] contava [illegible] novtas dalli Opera stessa.

mio Analitico. Inoltre questo porta in fronte *Mysterium ca-*
sus irreducibilis . . . *prorsus* . . . *vellatum*; e dal mirror
però volendo generalmente il metodo Cardanico nasce appu-
to allorche non solo sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ ma di più sia q raziona-
L'equaz. (B) inventata dal prestantissimo mio Fratello appu-
to perche ha l'ultimo termine q irrazionale non va soggetta al c.
irreducibile ad onta di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ ma per la stessa ragion
di non andar esposta a caso irreducibile non è compresa
nell'equaz. (R) del mio opuscolo. Posso aggiugner l'au-
torità del cel. e meritamente da V. S. lodato Sig. Colonnello
Lorgna, il quale principia la sua opera sul caso irreduc-
cibile dal fissare la diffinizione delle equazioni cubiche
vi esige che tanto p quanto q sieno razionali, e nello
Scholion onde termina l'opera avverte che le equaz-
ni di terzo grado ma che hanno l'ultimo termine q irra-
zionale non devono propriamente contarsi tra le equazioni
cubiche. E per altra parte il mio Saggio Analitico aven-
do in fronte alla seconda linea *De Cubicarum Equa-*
tionum solutione chiaro appalesa che le sole equa-
zioni veramente cubiche avea preso a suo oggetto, per
conseguenza quelle sole che hanno l'ultimo termine q razio-
nale.

Questa prima osservazione basterebbe a sostegno delle verità del mio Saggio Analitico contro chi si lasciasse trasportare a renderne sospette le dimostrazioni in vista della risoluzione che si ottiene della impropriamente cubica equaz. (β) ad onta di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$. Dagli elogi onde V. S. onora il mio opuscolo mi assicurano che il fatto di tale risoluzione non l'ha condotta a dubitare delle mie dimostrazioni nè tant'oltre si è avanzata la sua difficoltà. Persuaso anzi il penetrante suo spirito della verità teorica per me dimostrata e riflessivo ad un tempo al fatto dell'accennata risoluzione è rimasto colpito di stupore in considerando la prima in opposizion al secondo. Mi sembra di ben entrare nella sua mente pensando che tale sia stata l'interrogazione che il sottile indagatore suo genio fece prima a se stesso poi a me si degnò di voler proporre: Come il teorema dimostrato riguardo all'equaz. (α) $x^3 - px - q = 0$ non si estende all'equaz. (β) $x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{(1+n^2)\sqrt{1+n^2}}\right) = 0$, o come non estendendosi per qualche specifica differenza tra le due equazioni avviene poi che la formola di risoluzion della prima utile in essa nei casi $\frac{1}{4}q^2 \geqq \frac{1}{27}p^3$ ma assurda nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ si trasferisce felicemente alla seconda nel caso per appunto di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$? Questo è un nuovo esame non tentato mai dagli Analisti e distinto da quello che formò il soggetto del mio primo saggio Analitico. Ma io volentieri

stesso la Persona, a ... , ad confare si ... nostra dalli Opera stessa.

mi vi applico e perchè da V. S. propostomi per solo stimolo di no
curiosità virtuosa amante di conoscer il vero in estension
sempre più ampia e perchè utile a penetrare più intim
mente e svolgere viepiù largamente la natura delle eq
zioni tutte di terzo grado. Io lo eseguirò serbando il metodo di
nuate osservazioni già incominciato come il più semplice il
chiaro, il più acconcio a discoprire ed insinuare la ver
tà cui la mente umana non può in un tratto arri
vare ma per passi giugne a rinvenire

Osserv. 2ª Si faccia $x = z+y$ e poi $z = \sqrt[4]{a} - \sqrt[2]{b}\sqrt{\pm 1}$ ed $y =$
$= \sqrt[4]{a} + \sqrt[2]{b}\sqrt{\pm 1}$ intendendo per a un numero pari o dispari
a piacere ma per 2 costantemente un numero pari. Sarà
$z^2y + y^2z$, o sia $zy(z+y) = \left(\sqrt[4]{a^2} \mp \sqrt[2]{b^2}\right) 2\sqrt[4]{a} = 2\sqrt[4]{a^3} \mp$
$2\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$. Sarà poscia $(z+y)^3 = 8\sqrt[4]{a^3}$: onde paragonando si ri
va che 1° $zy(z+y) < \frac{1}{4}(z+y)^3$ della quantità $2\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ nel
caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ reale e può anche essere $zy(z+y)$ in se neg
tivo posto $2\sqrt[4]{a^3} < 2\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ 2° $zy(z+y) = \frac{1}{4}(z+y)^3$ nel
caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ o sia $b=0$ nel qual caso $z=y$ 3° $zy(z+y)$
$> \frac{1}{4}(z+y)^3$ della quantità $2\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ nel caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{-1}$
immaginario. Sarà inoltre

$$z^3 = \sqrt[4]{a^3} - 3\sqrt[4]{a^2}\sqrt[2]{b}\sqrt{\pm 1} \pm \sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2} \mp \sqrt[2]{b^3}\sqrt{\pm 1}$$
$$y^3 = \sqrt[4]{a^3} + 3\sqrt[4]{a^2}\sqrt[2]{b}\sqrt{\pm 1} \pm \sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2} \pm \sqrt[2]{b^3}\sqrt{\pm 1}$$

e perciò $z^3 + y^3 = 2\sqrt[4]{a^3} \pm 6\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$: onde confrontando ap
risce I°. $z^3 + y^3 > \frac{1}{4}(z+y)^3$ della quantità $6\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ nel

di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ reale 2° $z^3+y^3=\frac{1}{4}(z+y)^3$ nel caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ osia b=o ed in tal caso $z=y$ 3° $z^3+y^3<\frac{1}{4}(z+y)^3$ della quantità di $\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ nel caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{-1}$ immaginario, e può anche esser z^3+y^3 in se negativo qualora sia $2\sqrt[4]{a^3}<6\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$. e confrontando i tre primi coi tre secondi teoremi se ne deducono altri tre 1° $z^3+y^3>zy(z+y)$ nel caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ reale e la maggioranza sarà di $8\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ 2° $z^3+y^3=zy(z+y)$ nel caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ o sia $b=o$ cioè nel caso di $z=y$ 3° $z^3+y^3<zy(z+y)$ della quantità di $8\sqrt[4]{a}\sqrt[2]{b^2}$ nel caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{-1}$ immaginario. E confrontando tutti i teoremi si rende manifestissimo che i teoremi per il caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ reale sono diametralmente opposti ai teoremi per il caso $\sqrt[2]{b}\sqrt{-1}$ immaginario e che come di mezzo vi stanno quelli per il caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ o sia $b=o$ ossia di $z=y$.

Osservaz. 3ª facendo $u=t=z$ ed $a=\frac{p}{3\cdot 1+n^2}$, $b=\frac{n^2p}{3\cdot 1+n^2}$ e adoperando l'immaginario $\sqrt{-1}$ si avrà la formola (S) della prima radice dell'equaz. (B); ed adoperando il reale $\sqrt{+1}$ sarà facile il determinare convenientemente u, z, a, b per aver le espressioni delle radici dell'equaz. (R) per i casi di $\frac{1}{4}q^2 \gtreqless \frac{1}{27}p^3$. Veniamo ad una importantissima conseguenza. Dunque per l'equaz. (B) vagliono i teoremi del caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{-1}$ immaginario affatto opposti a quelli per il caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ reale che sono quelli stessi da me dimostrati nel mio saggio Analitico, e che vagliono per l'equaz. (R) unitamente agli altri appartenenti al caso di $\sqrt[2]{b}\sqrt{+1}$ o sia $b=o$ Tale oppo=

stesso la Persona, a [illegible], a contare [illegible]
[illegible] dall' Opera stessa.

sizion di teoremi stabilisce per quanto a me par distintamente una specifica differenza tra le equazioni (A) e (B) che deriva dall'aver quella l'ultimo termine razionale questa all'incontro irrazionale per cui è capace di quella forma [illegible] di radici composte di quattro porzioni due reali collo stesso segno e due immaginarie con segno contrario e le prime fra se eguali e le seconde pure fra se eguali come si vede nella formola (S).

Osservaz. 4ª Essi opposti teoremi però non impediscono che si faccia la radice tanto dell'equaz. (B) quanto dell'equaz. (A) cioè $x = z+y$ e che ambedue queste equazioni si rappresentino per l'equaz. (M) $z^3+3zy(z+y)+y^3 = p(z+y)+q$ purchè dal considerare q come numero soltanto (qual uniformandomi al Cardano da me illustrato doveva io considerarlo nel mio primo saggio Analitico) si passi ora a considerarlo senza alcuna determinazione e come una quantità razionale o numerica o come una quantità irrazionale. Gli accennati teoremi tanto fra loro opposti non fanno che assegnar opposti limiti per l'uso dello spezzamento consueto $z^3+y^3=q$, $zy(z+y) = \frac{1}{3}p(z+y)$, riguardo alle due equazioni (A) (B). Per l'equazione (A) cioè quando q è numero o sia quantità razionale ho dimostrato nel mio opuscolo e resta confermato dalle osservaz. 2ª e 3ª che quello spezzamento è giusto nei casi di $q \geqq \frac{1}{3}p(z+y)$ che sono i casi di $\frac{1}{4}q^2 \geqq \frac{1}{27}p^3$ ed è assurdo nel caso di $q < \frac{1}{3}p(z+y)$ che è il caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ cioè il caso delle tre radici reali in

quali incommensurabili il caso insomma chiamato irreducibile ma che piuttosto chiamar si dovrebbe di assurda applicazione

Al contrario per l'equaz. (B) si deduce dalle citate osservaz. 2ª e 3ª che quello spezzamento sarà giusto nel caso di $q < \frac{1}{3}p(2+y)$ qual si ha nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ e anche nel caso di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ sarà pur giusto nel caso di $q = \frac{1}{3}p(2+y)$ che si ha in un caso di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ siccome dimostrerò in appresso e sarebbe assurdo nel caso di $q > \frac{1}{3}p(2+y)$ che sarebbe il caso di $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$. La formola di risoluzione tirata dall'esposto spezzamento tanto per l'equaz. (A) quanto per la (B) è la formola (C) che si passerà questa essenzial differenza che essa formola sarà assurda per l'equaz. (A) nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ e per l'opposto sarà necessaria nel caso stesso per l'equaz. (B). V.S. cessi adunque di maravigliarsi che la formola dimostrata da me assurda per l'equaz. (A) si adoperi appunto nel caso di assurdità utilmente per l'equaz. (B) così adoperandola si fa un felice passaggio dall'Assurdità alla Necessità e sinora si è fatto senza avvertirlo. La scoperta di ciò doveva essere una conseguenza avventurosa della scoperta della ragion intrinseca per cui la formola (C) è assurda riguardo all'equaz. (A) nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$

Osservaz. 5 Ho detto che il caso di $q = \frac{1}{3}p(2+y)$ nell'equaz (B) si può avere nel caso ancora di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ che non si trae seco $q = \frac{1}{3}p(2+y)$ che in un supposto. Queste varie e bizzarre corrispondenze di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ nell'equaz. (B) meritano singolar considerazio

stesso la Persona, a cui [illegible] contare [illegible]
novtax dalla Opera stessa.

ne come opportunissime a discoprir meglio la specifica natura dell'equaz. (B) e la sua differenza dall'equaz. (A) Ma prima bisogna prevenir un equivoco. Si faccia nell'equaz. (B) $n=1$ onde si ridurrà all'equaz. (N) $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} = 0$ la prima di questa specie ritrovata e sciolta dal Nicole (Memorie dell'Accad. di Parigi an. 1741 42). La sua prima radice per la formola (S) si vede essere

$$x - \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} + \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} - \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1} = 0$$

onde $z = \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} - \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1}$ ed $y = \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} + \sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1}$, e $z+y = 2\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} = \sqrt{\frac{2p}{3}}$

Di più

$$z^3 = \frac{p}{3\cdot2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} - \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1} - \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} + \frac{p}{3\cdot2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1}$$

$$y^3 = \frac{p}{3\cdot2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} + \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1} - \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}} - \frac{p}{3\cdot2}\sqrt{\frac{p}{3\cdot2}}\sqrt{-1}$$

onde $q = z^3+y^3 = -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$; e per altra parte $\frac{1}{3}p(z+y) = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. Dunque q ed $\frac{1}{3}p(z+y)$ sono espressi per la stessa quantità $\frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$ ma con segno contrario e sarebbe però errore il dirli eguali differendo anzi per lo resto del doppio $\frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. Il caso poi di z^3+y^3 negativo non deve recar maraviglia essendosi generalmente notato il quando avvenir possa nell'osservaz. 2ª Ma in simil caso $\frac{1}{3}p(z+y) = zy(z+y)$ deve essere tanto più grande, e $p(z+y) = 3zy(z+y)$ deve superar d'altrettanto $(z+y)^3$ perchè sommando $3zy(z+y)$ positivo con z^3+y^3 negativo si deve aver $(z+y)^3$ come accade nel caso nostro perchè $3zy(z+y) + z^3+y^3 = p\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$

$(z+y)^3 = \left(\sqrt{\frac{2p}{3}}\right)^3 = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. Si ritorni al trovato valore di $q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. Dunque $q^2 = \frac{2p^3}{27}$ onde $\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{27}p^3$. Dunque $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ dunque questo è un dei casi in cui $q < \frac{1}{3}p(z+y)$ si congiunge con $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$

Osservaz. 6. Ma io posso assegnar un caso nel quale $q < \frac{1}{3}p(z+y)$ si combina con $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$. Paragonando l'equazione (B) coll'equaz. indeterminatissima (M) si ha $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right)$ onde $q^2 = \frac{4p^3}{27}\left(\frac{\overline{3n^2-1}^2}{\overline{1+n^2}^3}\right)$ ed $\frac{\overline{1+n^2}^3}{\overline{3n^2-1}^2}\,\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$. L'immortale suo fratello permette di dare ad n un valor ancora irrazionale e per mezzo appunto d'un valor irrazionale io osservo che si può render $\frac{\overline{1+n^2}^3}{\overline{3n^2-1}^2} = 1$ poiché quindi abbiamo $\overline{1+n^2}^3 = \overline{3n^2-1}^2$ e perciò si farà $\overline{1+n^2}^3 - \overline{3n^2-1}^2 = 0$ e compiute le convenevoli operazioni si ricaverà $n = \sqrt{3}$. Posto adunque questo valore di n ottienesi come sostituendo infatti vedesi $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$. Ciononostante rimane $q < \frac{1}{3}p(z+y)$ poiché $q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$ ed $\frac{1}{3}p(z+y) = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$ siccome fatte le debite sostituzioni nelle formole (B) (γ) si fa palese. Le parti pure ed y di x rimangono disuguali ed essendo $n = \sqrt{3}$ per svanire le porzioni immaginarie che formano la differenza di z ed bisognerebbe che si annientasse p con che anderebbero ad annientarsi ancor le porzioni loro reali e tutte tre le radici dell'equazione e ciascuno de' suoi termini. Dunque nell'equaz. il caso di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ primieramente non resta escluso ed

stesso la Persona, a cui si [illegible], ad contare si rinnovtav dall'Opera stessa.

il caso di $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$ non è necessario siccome O.S. afferma sul prin-
cipio della sua lettera e communemente si crede. In secondo lu-
lo stesso caso di $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$ nell'equaz. (B) non trae seco neces-
riamente il caso di $q=\frac{1}{3}p(z+y)$ né il caso di $z=y$. All'oppos-
questi tre casi legansi necessariamente nell'equaz. (A) e mi
giova pensare che a questa equazione Ella riferito abbia tal
necessario legame accennandolo nello stesso passo di sua let-
ra. Ma si è errato per innavvertenza nello stimare simil vincol-
universale ed assoluto per qualunque equaz. di terzo grado o del-
la forma (A) o della forma (B). È vero che contemplando
la formola (C) pare che necessariamente ne segua l'egua-
glianza di z ed y posto $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$. Ma volendo giudi-
degli avvenimenti particolari non bisogna formarsi sulla sem-
bianza di essa generale e se la medesima si modifichi come
deve per l'uso di essa alla risoluzione dell'equaz. (B) si ren-
palese l'inganno in creder quel legame assoluto e necessa-
e si vede che non ostante $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$ che si ha posto n-
sussiste la disuguaglianza di z ed y nell'equaz. (B) e solo
è quel legame veramente necessario nell'equaz. (A). Ecco u-
palpabile conferma della specifica differenza delle equ-
(A), e (B)

Osservaz. I Rifletto però che sebbene nell'equaz. (B) al ca-
di $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$ non corrispondano necessariamente $q=\frac{1}{3}p($
$z=y$ come necessariamente vi corrispondono nell'equaz (A),
rò anche nell'equaz. (B) la seconda e la terza eguaglianz-

...mbinano in un supposto colla prima. Difatti si supponga $n=0$ l'equaz. (B) allora diverrà $x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{-1}{1}\right) = 0$ o sia $x^3 - px - \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} = 0$ si avrà $z = y$ poiche svaniranno nella formola (S) le dette porzioni immaginarie e per conseguenza $z = y = \sqrt{\frac{p}{3}}$ onde $q = z^3 + y^3 = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, $\frac{1}{3}p(z+y) = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$ perciò si avranno le tre equazioni $z=y$, $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, $q = \frac{1}{3}p(z+y)$ insieme cospiranti ed unite siccome nell'equazione (A). Ma questa passerà notabilissima differenza che nell'equaz. (B) si avranno in un sol supposto concorrenti insieme all'incontro nell'equaz. (A) essendo necessariamente legate tra loro non potrà l'una avverarsi che non si avverino tosto anche le altre due. Il supposto adunque di $n=0$ sarebbe dissi il punto di communicazione tra le due equazioni (A) e (B) rimanendo in due regioni opposte per tutti gli altri casi soggette a contrarj teoremi e di in tal senso specificamente diverse

Osservaz. 8 Ho detto in tutti gli altri casi e per quelli di n positivo non ne rimarrà dubbio. Facciamo adunque n negativo. Ma io osservo che nella formola dell'equaz. (B) non vi entrando che n^2 ed in niuna maniera n perciò lo stesso darle in un valor positivo o negativo. La sola differenza sarà nella formola (S) poiche le porzioni immaginarie di z ed y concambieranno tra loro i segni con che si commuteranno anche tra z ed y le relazioni di maggioranza e di mino

stesso la Persona, a cui … fu contare si in-
narrava dall'Opera stessa.

ranza; onde avverta con altro carattere di diversità ... le equazioni (R), e (B). In questa con legge di continuità pro-gressiva ~~accrescimento~~ z = y nei casi di n positivo si fa $= y$ nel caso di $n=0$ e passa ad esser $> y$ nei casi di n negativo ... osservo simile legge nell'equaz: (R) ed ella mi asserisce nelle prime linee della sua lettera che la prima parte z dev'esser maggiore od almeno eguale alla seconda; ... $> y$ nel caso di $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, e $z = y$ nel caso di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ per ... legge di progressivo decrescimento dovrebbe farsi $z < y$ nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ Ma se si contempli la formola (C) ciò apparisce ripugnante e svolgendole due parti di essa rappresentanti z ed y ciò neppur si avvera

Osservaz: 9ª Quello però che massimamente importa ... è che quantunque l'equaz: (B) nel caso di $n=0$ vadi a comunicare coll'equaz: (R) ciononostante non passa nella regione di questa nei casi di n negativo ma retrograda ... essa nella regione sua propria; acconsente bensì d'esser condotta dal supposto di $\sqrt[3]{b}\sqrt{-1}$ di cui abbiamo parlato nell'osservaz: 2ª e dall'impero dei teoremi di questo immaginario ... in essa dimostrati al supposto ed al dominio dei teoremi ... $b=0$ ma ricusa di tragittare progressivamente al supposto ... ed all'impero dei teoremi di $\sqrt[3]{b}\sqrt{+1}$ quantitativo ... ma ritorna all'immaginario $\sqrt[3]{b}\sqrt{-1}$, riprende la sua ... ma e si rimette sotto la legge de' suoi teoremi. Se io ...

non ciò accade perche l'immaginario può con una progressio
ne aritmetica cadere e cade infatti nel nostro caso a zero ma non
può continuando la stessa progressione aritmetica tramutarsi
in quantitativo reale: in somma zero è termine aritmetico
del reale che dell'immaginario ma non è passaggio ari
metico dall'uno all'altro ma solo dal positivo al negativo
la trasformazione del reale quantitativo e dell'immagina
rio l'uno nell'altro è privilegio della progressione geometrica.
così è la cosa reciprocamente l'equaz. (A) che s'attiene
supposto ed alle leggi di $\sqrt[3]{b\sqrt{+1}}$ nel caso di $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$ ed
supposto di $b=0$ confluisce nel caso di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ ed esat
tamente ne coltettua le leggi ciononostante non avrà moto
progressivo per continuare e penetrare con dovuta gradazione
uniforme di natura nella provincia dell'immaginario
$\sqrt[3]{b\sqrt{-1}}$. e se non è falso ciò che altri si sono adoperati di di
mostrare che le tre radici reali inequali incommensura
bili dell'equaz. (A) nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ non si passo
no rappresentar per alcuna finita algebraica formola
io penso che questa ne sia la ragione perche nel caso di
$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ si sottrae l'equazione (A) ai supposti di $\sqrt[3]{b\sqrt{+1}}$ quan
titativo reale e di $b=0$ e per altra parte rifiuta di sot
tomettersi al supposto di $\sqrt[3]{b\sqrt{-1}}$ immaginario.

Osservaz. 19. Se nella formola dell'equaz. (B) si suppon
ga $n = \sqrt{\frac{q^2}{4} - p}$ e di più $\sqrt{\frac{p}{3}} = g$ razionale l'ultimo

stesso la Persona, a cui si [illegible] [illegible], [illegible] contare [illegible] [illegible]
[illegible] dalle Opere stesse.

termine di (B) diverrà razionale e si avrà l'equaz. (E)

$$x^3 - 3g^2x + \frac{2(3t^2-4)}{t^3}g^3 = 0$$ la cui prima radice sarà

$$x - \frac{g}{t} + \frac{g}{t}\sqrt{t^2-1}\sqrt{-1} - \frac{g}{t} - \frac{g}{t}\sqrt{t^2-1}\sqrt{-1} = 0$$ ossia $x - 2\frac{g}{t}$ =

e le altre due $x + \frac{g}{t} \mp \frac{g}{t}\sqrt{t^2-1} = 0$ ecco espresso generalmente il caso accennato dal perspicacissimo suo trattato della trasmutazione dell'ultimo termine dell'equaz. (B) da irrazionale in razionale. Ma ciò che per mio favore io osservo si è che al tempo stesso la prima radice diviene razionale. Dunque l'equaz. (B) non può acquistar l'ultimo termine razionale senza perder il carattere delle tre radici reali ineguali incommensurabili. Dunque non può essa trasmutarsi nell'equaz. (A) fornita di ultimo termine razionale ed insieme delle tre radici reali ineguali incommensurabili onde vieppiù si rende conformata la specifica differenza tra le equazioni (A) e (B).

Mi rimarrebbero altre osservazioni da aggiugnere ma per la presente lettera bastino le già esposte. Io le rassegno a V. S. [illegible] di finissimo discernimento e mi terrò avventuroso d'esser illuminato se in qualche errore e mi riguarderò come [illegible] re a suoi stimoli se ella giudicherà che io abbia con [illegible] e distinzione sviluppati i secreti delle equaz. in genere di [illegible] terzo grado e conciliate verità di teoria e di fatto in apparenza [illegible]

...mi Cuito alle tre consecutive lettere da me ricevute, vadi...
...ford con la prima.

... di infiniti fattori, ma benchè diversi siano

Ill.mo Sig. Sig. Padrone Col.mo 249

Benchè io abbia pregato lo stimatissimo Sig. Ab. Contarelli di significare a V. S. Ill.ma i miei divoti ringraziamenti per le dodici copie gentilmente regalatemi della Lettera sopra i logaritmi dei numeri negativi; nulladimeno non voglio perdere questa propizia occassione di rassegnarle il mio ossequio, e di rinnovarle gli attestati della mia obbligazioni. I pochi errori, che sono corsi nella sua Lettera piena zeppa di calcoli, li ho notati nella seguente carta, in cui i numeri delle pagine sono relative al Giornale.

Leggo nel Giornale alla pag. 220. che finora sono usciti 9. Tomi della Storia Letteraria di Italia; ossia, come io spiego, a dire 9. Volumi, due de' quali formano il Tomo VI., ed altrettanti spettano al Tomo VII., a cui il decimo Volume darà compimento. Inteso in questo senso il citato passo, io ho tutta l' Opera, e mi manca solo il Volume decimo, che io leggerò avidamente, quando uscirà. Parlando colla dovuta lode ad un mio Amico di quest' Opera insigne, che fa tanto onore all' Italia, si è invogliato egli di provedersene. La prego adunque a spedirla dirottamente a me al Sig. Gasparo Storti in Venezia, che poscia avrà la cura di inviarla a Treviso, e di prescrivermi nel tempo stesso la Persona, a cui li Amico ha da far contare li importare dell' Opera stessa.

244

termine di (B) diverrà razionale e si avrà l'equaz. (E)

$$x^3 - 3g^2x + \frac{2\cdot(3t^2-4)}{t^3}g^3 = 0$$ la cui prima radice sarà

$$x - \frac{g}{t} + \frac{g}{t}\sqrt{t^2-1}\sqrt{-1} - \frac{g}{t} - \frac{g}{t}\sqrt{t^2-1}\sqrt{-1} = 0$$ o sia $x - \frac{2g}{t} =$

e l 250

Quando comparirà in pubblico la nuova Opera da Lei promessa dai Letterati del Ducato di Modena, io ne farò sollecitamente l'acquisto, dilettandomi sommamente l'eleganza, e naturalezza dello stile, la vasta erudizione, il fino discernimento e l'imparziale equità.

Intanto io stavo attendendo il Volume decimo della Storia della Letteratura d'Italia, desiderando in oltre di sapere quanti Volumi ancora ci mancano per dar compimento a quest'Opera veramente eccellente.

Accetti V.S. Ill.ma l'offerta ch'io le faccio della costante mia servitù, accompagnata da quella pienissima, e ben dovuta stima, con cui mi segno

Di V.S. Ill.ma

Treviso 23 Luglio 1779

Ill.mo Sig. Ab. Girolamo Tiraboschi
Modena

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

...mi lecito alle tre consecutive lettere da me ricevute, vedi...
...fere con la prima.
... di infiniti fattori; ma benchè diversi siano

effetto
endo
la
... bilo
... a
... a'o
... ità
... idea
...
... dere
dunque
proposta
il pos...
... meo
... pon...

... ico,
... ii
... no.
$=ax$
$x:dy$
dunque
... dico
... no
... di
... tto
dx, o
$ax:y$
... o,
... on=
...
... di=
... lio
... dx=
... la
... di
... na
... este
... cansa
... re

termine di (B) diverrà razionale e si avrà l'equaz. (E)

$x^3-3g^2x+\frac{2(3t^2-4)}{t^3}g^3=0$ la cui prima radice sarà

$x-\frac{g}{t}+\frac{g}{t}\sqrt{t^2-1}\sqrt{-1}-\frac{g}{t}-\frac{g}{t}\sqrt{t^2-1}\sqrt{-1}=0$ o sia $x-2\frac{g}{t}=$

e l

ral

del

da

io c

zion

zir

des

Ac

za

ra

pic

eq

Me

sen

l

il

re

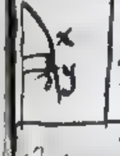
e a

zo

…mi visto alle tre consecutive lettere da me ricevute, vedi-
…tore con la premura:

…nulla è capace di infiniti fattori, ma benchè diversi siano i fattori del nulla, i prodotti diversi non sono, essendo affatto impossibile la disuguaglianza tra i nulla assoluti. Essendo dunque necessariamente $a \cdot o = b \cdot o$ sarà impossibile la proporzione $a \cdot o : b \cdot o = a \cdot b$ per verificar la quale bisogna considerare, che nella stessa ragione nella quale a supera, o è superata da b, nella stessa ragione ancora $a \cdot o$ superi, o venga superata da $b \cdot o$. Deduco l'impossibilità della proporzione $a \cdot o : b \cdot o = a \cdot b$ da un certissimo ed evidente principio quale è $a \cdot o = b \cdot o$. Deduce il Sig.r Conte la proporzione $a \cdot o : b \cdot o = a \cdot b$ dal dividere l'antecedente $a \cdot o$, e conseguente $b \cdot o$ per lo stesso o. I principii adunque ugualmente veri, le conseguenze diametralmente opposte. Non potendosi adunque da principii veri dedurre il possibile, e l'impossibile, rimane a dire essere erroneo nella Analisi il maneggio de zeri a norma della quantità.

Nella Parabola per dx ridotta a zero altro non concepisco che il termine o punto x al quale sempre più si accostano sì dx, che dy nel decrescere che fanno.



Il Sig.r Conte dice, nella Parabola essendo $dx : dy = ax + \frac{dxdy}{a} : y$ decrescendo dx e dy la ragione di $dx : dy$ sempre più si accosta alla ragione di $ax : y$: dunque ridotta a zero dx e dy, sarà $o : o = ax : y$. Io similmente dico essendo $dx : dy = ax + \frac{dxdy}{a} : y$; quanto più dx e dy si accostano al loro commune termine x; tanto più la ragione di $dx : dy$ si accosta alla ragione di $ax : y$: dunque ridotta dx e dy al commune termine x, sarà il termine di dx, o punto x al termine di dy, o punto istesso x, come $ax : y$.

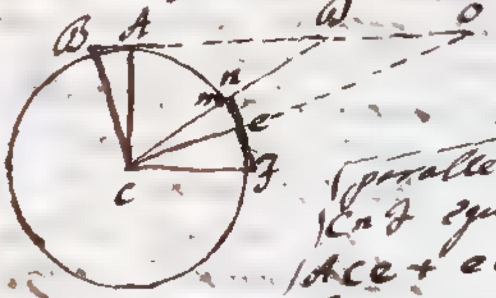
Essendo vera l'equazione $-a^2 - a\sqrt{-1} \cdot o = -a^2$ vole il Sig.r C. …ente, che dividendo il tutto per lo stesso o sia con… …lo vero $\frac{-a^2}{o} - a\sqrt{-1} = \frac{-a^2}{o}$: per lo stesso motivo adunque essendo vera l'equazione $-a^2 \cdot o - a\sqrt{-1} \cdot o = -a^2 \cdot o$ dividendo il tutto per nulla dovrebbe verificarsi il falso cioè $-a^2 - a\sqrt{-1} = -a^2$; ed ecco che il maneggio de zeri ci dà il falso.

La tangente di un arco il cui raggio a ed il seno $= x$ è esattamente $= \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$: ma siccome questa formola si de-

a

duce dalla somiglianza de' triangoli, onde in supposizi[one] di $x=a$ non esistendo più questi triangoli, torno a ri[pe]tere che in darno si cerca dedurre la tangente del qua[-]drante dalla formola $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$: ma mi si dirà: tal for[-]mola $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$ è generica: dunque da questa si può dedurre la tangente del quadrante; ed io risponde[rò] di nuovo essere generica, o in quanto che esprime [la] tangente di qualunque arco, minore sempre del quadr[ante] ecc.

I triangoli CnF, COB sono costantemente simili sia[no] eguali, o disuguali gli archi Am, em. Per la costruzione BC è normale a ce; Fen come tangente in e è normale alla stessa ce; dunque [illegible] parallela ad Fen: dunque gli alterni BCO, CnF eguali: ma per la costruzione BCA + ACe [illegible] ACe + eCF = 90°, dunque BCA = eCF: ma CA[illegible] CeF sono retti, dunque il terzo CFe = COA: dunque i due triangoli CnF, COB equiangoli, e sim[ili].

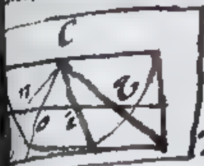


In oltre si supponga pure $AO = \frac{a^2}{(a^2-b^2):ab}$ il Sig. Conte [illegible] duce in caso di $b=a$, $AO = \frac{a^2}{0}$; ma siccome $\frac{a^2}{(a^2-b^2):ab}$ [illegible] zai contrasto eguale $\frac{na^2b}{a^2-b^2}$; quindi facendo $b=a$ sor[tirà] ancora $AO = \frac{na^3}{a^2-a^2} = \frac{na^3}{0}$, o pure anche $= \frac{na}{0}$. Con dim[os]trarmi adunque, che dalla formola $\frac{a^2}{(a^2-b^2):ab}$ venga $AO=$[illegible] non si toglie la difficoltà da me proposta, mentre [illegible] mente io dimostro poter essere $AO = \frac{na^3}{0}$, ovvero $=\frac{na}{0}$, onde dimostro poter essere diversa la tangente del qua[-]drante secondo il diverso maneggio de' zeri.

Non è mio impegno il dimostrare, che dalla formola $\frac{p\sqrt{-1}}{u\cdot n} l\frac{2+\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$ non si possa dedurre una vera equazi[one] quale è $o = \frac{\sqrt{-1}}{2} l1$: il mio impegno è dimostrare un'equazione contraria alle sue idee; onde se dal modo di calcolare deduce il Sig. Conte una equazione vera, quale è $o = \frac{\sqrt{-1}}{2} l1$, dallo stesso modo deduco un'equazione falsa; dal che credo poter conchiudere essere falso questo suo modo di calcolare. Ho io dimostrato dover essere secondo il Sig. Conte $\pm np\sqrt{-1} = \frac{p}{0} l1$ [illegible] $\pm np\lambda\sqrt{-1} = \frac{p\lambda}{0} l1$: ma $\pm np\lambda\sqrt{-1}$ per il Sig. Conte $= l1$ [illegible] $\frac{p\lambda}{0} l1 = l(1)^{\frac{p\lambda}{0}} = l1$. Di nuovo essendo $\pm np\sqrt{-1} = \frac{p}{0} l1$ [illegible] $\frac{\pm np\sqrt{-1}}{\lambda} = \frac{p}{0\cdot\lambda} l1$: ma come $\frac{p\lambda}{0} l1 = l(1)^{\frac{p\lambda}{0}} = l1$; così [illegible]cora $\frac{p}{0\cdot\lambda} l1 = l(1)^{\frac{p}{0\cdot\lambda}} = l1$: dunque anche $\frac{\pm np\sqrt{-1}}{\lambda} = l1$: il [illegible]

alieno dal sentimento del Sig.r Conte. Ma il Sig.r Conte dirà che dalla stessa formola si deduce una vera equazione; e questo è appunto in mio favore; mentre il diverso maneggio de' zeri può far dedurre delle equazioni vere e false.

Suppongasi pure il circolo del diametro $\underline{oi}$ la metà di quello del diametro $\underline{nq}$; sarà sempre vero, qualunque valore di quantità si assegni VA PS, essere i detti circoli corrispondenti in ragione di 1:2. Si concepisca il punto S in P, ed allora i due circoli sono ridotti a nulla: ma il nulla a cui si è ridotto il circolo del dia-

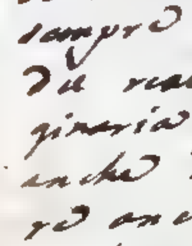


metro $\underline{oi}$ è uguale, e si identifica con il nulla a cui si è ridotto il circolo del diametro nq: dunque è impossibile che il nulla del circolo del diametro $\underline{oi}$ quale non si distingue dal nulla del circolo del diametro nq, sia al nulla del circolo del diametro nq come 1:2. Di più il nulla de' circoli corrispondenti altro non è che il commune punto C: dunque come è falso essere il punto C al punto C come 1:2; così sarà falso essere il nulla d'un circolo al nulla dell'altro come 1:2.

Supponendo essere nella Parabola $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0} = \frac{2x}{y}$, e supponendo $\underline{p}$ parametro, ho dimostrato dovere esservi nella Parabola $\frac{p}{0} = \frac{2y}{0} + \frac{y}{2x}$; e siccome il Sig.r Conte vi dove ne gli genera il termine $\frac{y}{2x}$, ne segue essere nella Parabola $\frac{p}{0} = \frac{2y}{0}$. Io gradirei moltissimo vedere come si possa applicare alla Parabola una tale equazione. Si dirà: essendosi supposto $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0} = \frac{2x}{y}$ multiplicando per $dy = 0$ sarà $\frac{p \cdot 0}{0} = \frac{2y \cdot 0}{0}$; e siccome $\frac{p \cdot 0}{0} = \frac{p\,dy}{dy}$, la $\frac{p\,dy}{0} = \frac{2y \cdot dy}{dx}$; dunque essendo $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{y}{2x}$ sarà $p = \frac{2y^2}{2x}$, equazione vera nella Parabola. Rifletta il Sig.r Conte, che io non intendo dimostrare che non si possa dedurre una vera equazione; intendo solo dire che l'equazione $\frac{p}{0} = \frac{2y}{0}$ ci conduceva egualmente al falso nella Parabola: mentre essendo impossibile la disuguaglianza tra nulla assoluti, il denominatore $\underline{0}$ nella frazione $\frac{p}{0}$ è uguale, e si identifica con il denominatore $\underline{0}$ nella frazione $\frac{2y}{0}$: la frazione $\frac{p}{0}$ si trova uguale a $\frac{2y}{0}$ dunque nella Parabola $p = 2y$. Il dedurre adunque il vero, e falso nel calcolare i zeri mi conferma sempre più nelle mie idee.

Nella parabola suppongo $\frac{2dy}{dx}$ evanescente, ma non la suppongo zero, ma bensì quantità minima quanto uno vole. Non mi si torni a dire dunque non si ha l'esattezza geometrica;

mentre ho dimostrato nella Parabola istessa, che negligendo una infinità di triangoletti, quali non sono zeri, ma rità infinitesime di secondo grado, pure si trova con tutta l'esattezza Geometrica l'area di questa curva.
Supponendo il raggio $a=1$ per dimostrare essere $-1, \frac{2+\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}$, $1, \frac{-2-\sqrt{-1}}{2+\sqrt{-1}}$ termini di una serie continua di termini geometricamente proporzionali, bisogna prima esser certi, che tra quantità eterogenee si possa dare proporzione; supponendo anche questo, bisogna dimostrare, che un termine qualunque preso, ed elevato ad una potenza in[de]terminata x divenga uguale ad altro qualunque termine preso. Io certo posso questo dimostrare: ma i principj di questa dimostrazione mi somministrano solidissime ed incontrastabili ragioni contro il metodo del Sig. Eulero. Di ciò ben volontieri mi estenderei, ma oltrapasserei i limiti di una lettera.
Essendo $\sqrt{1-x^2}=0$ nella formola $du = \frac{\sqrt{-1}\cdot 1\cdot dx}{\sqrt{x^2-1}}$ si porrà pure in luogo di $\sqrt{x^2-1}$, $o\sqrt{-1}$ e sarà $\frac{\sqrt{-1}\cdot 1\cdot dx}{o\cdot\sqrt{-1}} = du$. Se il Sig. Conte vole fare maneggio de' zeri, io non nego, che si possa dedurre $\frac{\sqrt{-1}\cdot 1\cdot dx}{o\cdot\sqrt{-1}} = \frac{1\cdot dx}{o}$; ma siccome deve necessariamente essere $o\sqrt{-1}=o$; quindi si deve concedere, che si possa anche dire $\frac{\sqrt{-1}\cdot 1\cdot dx}{o\cdot\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}\cdot 1\cdot dx}{o}$, onde se nell'ipotesi di $\sqrt{1-x^2}=0$ non si conceda $dx=0$, segue sempre con il maneggio de' zeri essere $du = \frac{1\cdot dx}{o}$, ovvero du reale: essere anche $du = \frac{\sqrt{-1}\cdot 1\cdot dx}{o}$, onde du immaginaria. Che se poi nell'ipotesi di $\sqrt{1-x^2}=0$ si dica anche $dx=0$ allora dovrà dire il Sig. Conte doversi anche $du=0$, onde nullo l'incremento del quadrante.
Io leggo nella sua pregiatissima. Per la natura del circolo abbiamo $DF : FS = CD : CM$
$du : dx = 1 : \sqrt{1-x^2}$, e perciò $\frac{du}{1} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
Questa analogia vale anche quando $CM=0$ &c. In primo luogo è chiaro, che se nel caso di $CM=0$



la porzione $du : dx = 1 : \sqrt{1-x^2}$ debba essere uguale, dovrà essere $dx=0$; essendo il prodotto degli estremi $du\cdot\sqrt{1-x^2}=0$, ed il prodotto de' medi $1\cdot dx$ non sarebbe zero. Nel caso adunque di $CM=0$, acciò ottenga la proporzione il Sig. Conte deve essere necessariamente $dx=0$, dunque anche il lato $FD = du = 0$; essendo chiaro, che fatto in un triangolo un lato uguale a zero debbano anche gli altri lati agguagliarsi al nullo. Del resto ristringo il mio dire con assolutamente negare la formola $du = \frac{1\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ applicabile al punto E del

...; mentre in questo punto svaniscono i triangoli ∂QS, ∂CM simili in virtù de' quali si riduce la formola du=$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

...ngo alla sua dottissima in data 4 Giugno. Per il Sig.r Eulero ...ni, per i altro non intende, che una quantità infinitamente piccola: cosa dunque secondo il Sig.r Eulero essere quantità reale, se pure non sogliamo interpretare il sentimento del Sig.r Eulero, e dire, che per quantità infinitamente piccola i possa intendere anche una quantità infinitamente piccola, ed immaginaria.

...pare nell' equazione $\frac{y}{n} = \cos:\frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm \sin\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}$; $n=$ ...; onde si abbia $\frac{y}{n} = \cos: 2\lambda p\cdot 0 - 1 \pm \sin\cdot 2\lambda p\sqrt{-1}\cdot 0$. Si riduce dal Sig.r Conte la proposta equazione a $\frac{y}{n} = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$; ma non si sa comprendere, perche si abbia da far conto di un zero, e non dell' altro; mentre la vera riduzione è $\frac{y}{n} = 1-1 \pm 2\lambda p\sqrt{-1}\cdot 0$; $\frac{y}{n} = 0 \pm 2\lambda p\sqrt{-1}\cdot 0$; onde moltiplicando per n si troverebbe $y = \frac{0}{0} \pm \frac{2\lambda p\sqrt{-1}\cdot 0}{0}$. In secondo luogo come $\cos: 2\lambda p\cdot 0 = 1$ così $\sen: 2\lambda p\sqrt{-1}\cdot 0$ ...zero; onde non si potrà negare, che possa anche essere $\frac{y}{n} = 1-1 \pm 0 = 0$; onde $y = \frac{0}{0}$. In terzo luogo ha il Sig.r Eulero generalmente dimostrato essere $(\cos:\frac{z}{n} \pm \sin:\frac{z\sqrt{-1}}{n}) = (\cos: z \pm \sin: z\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ onde insistendo su di questa verità, ... $\cos:\frac{2\lambda p}{n} \pm \sin:\frac{2\lambda p\sqrt{-1}}{n}) = \cos: 2\lambda p \pm \sin: 2\lambda p\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = (\cos: 2\lambda p \pm \sin: 2\lambda p)^{0} = 1$; onde sia qualunque il numero ... supponendo $n = \frac{1}{0}$ sarà $\frac{y}{n} = 1-1$; onde $y = 0$; o λ sia ...zero, o λ sia $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm 4$. In quarto luogo, essendo $n = \frac{1}{0}$ sarà $\frac{y}{n} = 0$: ma per il Sig.r Eulero $\frac{y}{n} = i$, i quantità infinitamente piccola, dunque i non eguale a zero; dunque ne pure $n = \frac{1}{0}$. In quinto luogo nell' equazione $(1+\frac{y}{n})^{n} - 1 = 0$ essendo $y = l1$ sarà $(1+\frac{l1}{n})^{n} - 1 = 0$; onde $(1+l1^{\frac{1}{n}})^{n} - 1 = 0$; $1 + l1 = 1^{\frac{1}{n}} = 1^{0} = 1$; onde $1 + l1 = 1$: ...dunque $l1$ non potrà essere eguale se non a zero; ma nella equazione $1 \pm 2\lambda p\sqrt{-1} = l1$ è impossibile fuori, che il caso di $\lambda = 0$. Ciò posto l' equazione $(1+\frac{y}{n})^{n} = 1$ è ...ra: sarà dunque $(1+\frac{y}{n}) = 1^{\frac{1}{n}}$; $y = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$. Si supponga ... essere $l1 = y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$, sarà $\pm 2\lambda p\sqrt{-1} = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$. Essendo n eguale all' infinito; ma non eguale ad $\frac{1}{0}$ mi ...forma il Sig.r Conte essere impossibile l' equazione $2\lambda p\sqrt{-1} = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$; mentre mi concede nella stessa

a

supposizione di n essere impossibile l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$: ma nella supposizione di $n=\frac{1}{0}$ l'equazione $\pm r\lambda p\sqrt{-1} = n(1^{\frac{1}{n}}-1) = \frac{1}{0}(1^{0}-1) = \frac{1}{0}-\frac{1}{0} = 0$: dunque o sia semplicemente uguale all' infinito; o sia $n=\frac{1}{0}$, sarà sempre impossibile essere $\frac{1}{2}y = \pm r\lambda p\sqrt{-1}$: ma dalle equazioni $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\,\frac{-2-\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ si deduce $\pm r\lambda p\sqrt{-1}$; dunque non potendosi dal vero dedurre il falso; o queste due equazioni sono false, o è falsa l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$: ma questa equazione è senza contrasto vera, dunque le due esposte equazioni sono false. Questo raziocinio a mio credere è invincibile; onde prego il Sig.r Conte a volerlo ben ponderare: nè mi si dica l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ essendo d'infinito grado deve avere infinite radici; mentre questo io concedo; e posso anche assegnare con una generalissima formola i veri valori di y, quali valori uno è il zero, e li altri tutti immaginarii; non però compresi dalla formola $\pm r\lambda p\sqrt{-1}$. A tutto ciò si potrebbe anche aggiungere essere impossibile una quantità assolutamente infinita; e perciò dee essere impossibile n come si concepisce dal Sig.r Conte. Il Sig.r Ab: Boscovic in una dissertazione su la natura degli infinitamente piccoli ha ad evidenza dimostrato essere impossibile una quantità assolutamente infinita.

Sommamente ho gradita ed ammirata la sua breve dimostrazione con la quale prova essere l'ordinata y immaginaria benchè uguale ad $1 \pm \sqrt{adx}\cdot\sqrt{-1}$.

Sono finalmente a rispondere alla sua dottissima data 22: Giugno. Se generalmente è vero il teorema = Quantitatum proporzionalium potentiæ ejusdem ordinis sunt proporzionales = essendo a, c, b, continuamente proporzionali sarà $a^m : c^m = c^m : b^m$; onde se a sia $=1$ $c=-1$ $b=1$ $m=\frac{1}{2}$ essendo $1:-1=-1:1$ dovrebbe essere $(1)^{\frac{1}{2}}:(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}}:(1)^{\frac{1}{2}}$ il che è falso. E' vero che $(1)^{\frac{1}{2}} = \pm 1$; ma essendo anche $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{-1}$, sarebbe verisimile si dovessero verificare le due proporzioni $1:+\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}:1$, $-1:-\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}:-1$. Credo che queste ragioni solidissime non sono; ma ciò non ostante non mi lasciano vedere del tutto chiaro.

mendo il 0.0 differisca da $\frac{0}{\ }$, ed il Sig.r Conte mi risponde essere $0\cdot 0 : 0 = 0 : 2$; dunque mi concede non essendo $0 =$ non essere nè pure $0\cdot 0 = 0$; cioè mi concede potersi concepire diversità ne' valori dei nulla assoluti il che è impossibile. Ma la nostra questione si puole ridurre a vedere se $\frac{1}{0\cdot 0}$ sia equale ad $\frac{1}{0}$. Crede il Sig.r Conte essere $\frac{1}{0}$ l'infinito assoluto. Dunque deve concedere, che non si possa concepire frazione il di cui numeratore sia $\pm$ d'un valore maggiore di $\frac{1}{0}$, mentre se $\frac{1}{0}$ rappresenta l'infinito assoluto, deve $\frac{1}{0}$ superare in valore, tutte le possibili frazioni, quali abbiano per numeratore l'unità. Ciò posto non dirà il Sig.r Conte essere la frazione $\frac{1}{0\cdot 0}$ di un valore minore di $\frac{1}{0}$: non vorrà dire essere $\frac{1}{0\cdot 0}$ d'un valore maggiore di $\frac{1}{0}$; supponendosi per $\frac{1}{0}$ l'infinito assoluto: Dunque rimane a dire essere $\frac{1}{0\cdot 0} = \frac{1}{0}$; onde $\frac{a^4}{0\cdot 0} : \frac{aa^3\sqrt{-1}}{0} = a^4 : aa^3\sqrt{-1}$; il Sig.r Conte maneggiando i zeri come le quantità trova $\frac{a^4}{0} : \frac{aa^3\sqrt{-1}}{0} = a : 0\cdot a\sqrt{-1}$; ma ciò ridonda sempre in mio vantaggio; mentre il Sig.r Conte da principii certi deduce una proporzione, ed io da principii quali devono essere egualmente certi per il Sig.r Conte deduco altra proporzione del tutto contraria alla sua: ma siccome è impossibile dal vero dedurre il falso; dunque rimarrà a dire essere nell'Analisi erroneo il maneggio de' zeri.

Venendo da Berlino risposta dal Sig.r Formey, riceverà la quale publicherò la memoria da me già indicata altra volta, e mi farò preggio inserire di quando in quando le sue dotte, e saggie riflessioni. Mi continui il Sig.r Conte la sua padronanza continuando io immutabilmente la mia servitù

di V. S. Ill.ma Roma 31 Luglio 1779.

Dev.mo ed Obblig.mo Servo
Giuseppe Calandrelli

Ill.mo Sig. Sig. Pron. Col.mo 259

Quei ringraziamenti, che coll'usata sua gentilezza ha voluto fornirmi V. S. Ill.ma per le poche copie di un [illegible] della lettera dell'immortale C. M. Vincenzo suo fratello, doveva io farli a lei molto prima per [illegible] e con ciò e con gli altri suoi proprii [illegible] onorato tanto questo Giornale, che per questo [illegible] le debbo non poco. Mi compiaccio che la gentilissima sua lettera mi abbia ricordato un dovere, che [illegible] già da gran tempo, e la prego a ricevere questi sinceri attestati della mia riconoscenza.

Mi spiace, che al primo onore ch'io ricevo de' suoi comandi non posso corrispondere, come [illegible], colla felicità nell'eseguirli. Siamo in tempi, in cui si vendono più facilmente i libri cattivi che [illegible], e perciò non è più possibile il trovar copie di questa edizione della mia Storia, de' primi tomi [illegible] quale lo stampatore non ne ha pur uno già da qualche anno. Oltre la ristampa di Firenze, e di Venezia, [illegible] molto infelice se ne fa ora in Napoli, che è assai buona, e già ne sono usciti quattro tomi in 4.º [illegible] avanza con qualche celerità, e perciò se il suo amico vuole ad ogni modo [illegible] gli [illegible] [illegible] libreria colla mia Storia, potrebbe provvedersi di detta ristampa.

Dopo il decimo Tomo ora uscito due altri rimangono ancora a stamparsi; uno de' quali abbraccia il [illegible] XVII, l'altro, dopo un breve prospetto di cento anni del nostro secolo, comprenderà le giunte e [illegible]ezioni a tutta l'opera. Quindi io darò mano alla Biblioteca Modenese, che in breve spero di [illegible].

Nel Tomo 18. del Giornale che ora si va stampando saranno inserite le correzioni degli errori

256

260

covi nelle Lettere del Co. Vincenzo. Bondi il Cavaliere della stampa de [illegible] [illegible], e [illegible] che qualche errore vi è sfuggito.

La prego de' miei distinti rispetti al Degnissimo Sig. Conte Canonico [illegible], e la prego insieme a [illegible] mi riguardi nel numero de' suoi servitori, e de' sinceri stimatori del vero suo merito, e [illegible] qualche occasione in cui possa mostrarle la stima e il rispetto, con cui mi protesto

Di V. S. Ill.ma

Modena 13. Agosto 177..

D.mo Obl.mo Serv.
Girolamo Tiraboschi

Sig.r Conte Riu.mo

ea
li
ues:
louui
ma
me o
o li: et:
ui,
sa: ola
le
uo: Q.
esso rà
are
ifica: lla
mi: no,
io
i lo
no:
della co
in:
i tta
a

254

2

5

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Padron Col.mo
Il Nob. Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Trevigi

[illegible] finalmente la traduzione del secondo tomo della Meccanica. Io le avea
promesso di compierlo in più breve tempo del primo. ma Ella che è assai discreta,
[illegible] presa questa mia promessa nel senso giusto, quando cioè quella parte di
[illegible] che è ben conveniente ch'io mi prenda per sollevarne i miei Fratti, me lo aves-
permesso. Or per una strana combinazione è appunto accaduto, ch'io abbia dovu-
impiegare in altro la miglior parte dell'ultimo, e dell'antecedente Inverno, ma
è per me il tempo più opportuno per poter fare qualche cosa di serio. Siccome o
[illegible]ngue io credo d'aver in fatto mantenuta la mia promessa, perchè il tempo li- ...
[illegible] impiegatovi è stato minore dell'altra volta; così avendo a fare con una
[illegible]sona tanto discreta spero che per gli avvenuti inopinati impedimenti non sa-
[illegible] per mancator di parola. Le rinnovo poi il presente tutto ciò, che le
scritto spedendole il primo tomo, cioè ch'io ho bensì cercato con tutto il cuo-
di contribuire all'onorata memoria dell'ottimo Conte Abb.e; ma che del resto
[illegible] è sua; che per conseguenza Ella è assoluto padrone di scancellare, mutare,
togliere tutto ciò, che nella mia traduzione non le piacesse; e ch'io sarei mortifica-
al sommo, se per mio riguardo Ella lasciasse correr cosa, che in qualunque mi-
[illegible] parte rendesse l'opera meno perfetta. Ella creda che su questo punto i miei
[illegible]menti sono sinceri, e ch'io conosco di dover troppo all'ottimo Conte Abb.e per po-
[illegible] aver di diversi. Se non le è d'incomodo pregola di consegnare al latore della
[illegible]sente le opere del Guglielmini colle annotazion del Lendrini, se pur non m'in-

stimanti, e di assicurarlo della mia stima. La dotta

corrispondenza

gianno, che v'erano tra i libri trasportati da Bologna, e di lasciarmele per qualche
tempo. Se vaglio a servirla in altro, Ella disponga liberamente di me, e mi creda
che pieno d'ossequio, e di stima sono

Di Lei Riv.mo Sig.r Conte

Venezia 4 Ag.o 1719

Umiliss.mo Obblig.mo Servit.
Alberto Van Aungarden

s'9

617

iava, come
riescono
et-
oni,
ola
di
ra'
lla
no,
io
io
co

plimenti, e di assicurarlo della mia stima. La detta
corrispondenza

All Nobile Sig.r Sig.r Pn̄ Ill.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Treviso

Nobile Sig.r Conte Sig.r e P.rone Stimo. 259

Molto Rev.do P.re Sig.re P.rone Colmo 267

La gentilissima di V. R. mi è stata spedita da Treviso a Castelfranco dove io mi sono trasferito per prendere, come ogni anno son solito, l'acque di Recoaro, che mi riescono assai giovevoli. L'annesso foglio contiene il mio rispettoso parere intorno alle sue ingegnosissime Osservazioni, il quale io sottopongo al purgatissimo suo giudicio. Spero che Ella resterà persuasa dell'utilità della formola Cardanica in moltissimi casi, quando $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, nei quali si determinano le tre radici reali col metodo di mio Trattato, salve le condizioni, che p, q siano quantità razionali, e che le tre radici siano incommensurabili. Non mi sovviene in qual Raccolta si contenga una bella Dissertazione, nella quale si difende la formola del Cardano, che nel caso irreducibile era stata accusata di paralogismo dal Sig. Ab. Frisi. La Dissertazione è anonima, ma io so che il suo Autore è il Sig. Gianfrancesco de' Malfatti Prof. di Matematica nella Università di Ferrara. Il Sig. Lodovico Venezze suo degnissimo Cugino è troppo gentile conservando grata memoria delle poche attenzioni, ch'io gli ho usate in Treviso. Lo prego di portargli i miei complimenti, e di assicurarlo della mia stima. La dotta

corrispondenza

corrispondenza di V. R., mi sarà sempre sommamente pregevole, e l'assicurazione de' suoi pregiatissimi comandi, di cui la supplico d'onorarmi, mi distinguerà costantemente quale mi sottoscrivo

Di V. R.

Castelfranco 13. Agosto 1779.

Molto Rendo P. D. Pietro Cossali
S. Simone e Giuda. Padova

Umil.me Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Egli è utile lo sciogliere l'equazione $x^3 - px - q = 0$ in ambo i casi di q razionale, o irrazionale. Ma restrignendomi alla prima supposizione, e richiamando il metodo dell'Ab. Vincenzo mio fratello $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right)$ avremo $-q$ quantità razionale nella detta circostanza, cioè o che $\frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{m}$, posta m grandezza razionale, o che si possano estrarre le $\sqrt{\frac{p}{3}}$, $\sqrt{1+n^2}$. 265

Nella prima ipotesi scopriremo $m\sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt{1+n^2}$, $m^2\frac{p}{3} = 1+n^2$, $m^2p - 4 = 3n^2 - 1$, e fatte le sostituzioni, ci si presenterà $-q = 2\left(\frac{m^2p-4}{m^3}\right)$ adempiute le debite eguagliazioni. Sia per esempio $p = 6$, $m = 2$, e ne proverrà $-q = 5$, e poiché $m^2\frac{p}{3} = 1+n^2$, ne dedurremo $8 = 1+n^2$, e per conseguenza $7 = n^2$, ed $n = \pm\sqrt{7}$. Quindi l'equazione $x^3 - 6x + 5 = 0$, in cui $q = 5$ ha un valor razionale, e $\frac{q^2}{4} = \frac{25}{4}$ è minore di $\frac{p^3}{27} = 8$, si trova fornita, usato il metodo di mio fratello, delle tre radici $x - 2\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} = x - 1 = 0$, $x + \sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = x + \frac{1}{2} \mp \sqrt{7}\sqrt{\frac{3}{4}} = x + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{21} = 0$, che sono ineguali, e incommensurabili. Basti questo esempio per tutti gli altri infiniti, che si potrebbero addurre.

Passo alla seconda circostanza, che richiede quadrati i numeri $\frac{p}{3}$, $1+n^2$. E primieramente se p sia un quadrato moltiplicato per 3, ne risulterà $\frac{p}{3}$ numero quadrato. In secondo luogo se si determini n^2 uguale ad un numero quadrato meno l'unità, sarà $1+n^2$ numero quadrato. Scelgasi il quadrato 1 e moltiplicandolo per 3 si faccia $p = 3$, e $\frac{p}{3} = 1$. Un altro quadrato sia $= \frac{9}{4}$,

e

266

e darasse $1 = \frac{4}{4}$, ne nascerà $n^2 = \frac{5}{4}$. Sarà pertanto $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right) = \frac{44}{27}$, e così offrirà l'equazione $x^3 - 3x + \frac{44}{27} = 0$, in cui $\frac{q^2}{4} = \frac{(22)^2}{(27)^2} = \frac{484}{729}$ è minore di $\frac{1}{27}p^3 = 1$. Si risolverà essa nelle tre radici $x - 2\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} = x - \frac{4}{3} = 0$, $x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = x + \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{4}{3}} = x + \frac{2}{3} \mp \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$, che sono disuguali, e non hanno comune misura.

Se ritenuto il valore $n^2 = \frac{5}{4}$, si ponesse $p = 27$, si troverebbe $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n\sqrt{1+n^2}}\right) = 44$, ed $\frac{1}{4}q^2 = 484 < \frac{1}{27}p^3 = 729$, e l'equazione $x^3 - 27x + 44 = 0$, nella quale q ha un valor razionale, e $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, nascerebbe dalle tre radici ineguali, e incommensurabili $x - 2\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} = x - 4 = 0$, $x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = x + 2 \mp \sqrt{15} = 0$.

Le parti $z + y$, in cui si divide ~~l'equazione~~ la radice x, si assumono da principio indeterminate, a cagione di assegnar poscia loro quei valori, che conducono alla soluzione della formola $x^3 = px + q$. Poichè $x = z + y$, avremo $x^3 = z^3 + 3zy(z+y) + y^3$, e sostituendo x in cambio di $z+y$, e $px+q$ in cambio di x^3, $px + q = z^3 + 3zy \cdot x + y^3$. A cagione di rinvenire y ... di esprimere y per z, egli è necessario di porre $p = 3zy$, onde ne risulti $\frac{p}{3z} = y$, e $\frac{p^3}{27z^3} = y^3$. Levate dalla

Dalla equazione le quantità eguali px, $3zy \cdot x$, 267
resta $q = z^3 + y^3$. In luogo di y^3 si collochi il suo
valore $\frac{p^3}{27 z^3}$, e ne risulterà $q = z^3 + \frac{p^3}{27 z^3}$, e quindi
$z^6 - q z^3 = -\frac{p^3}{27}$, e dopo le necessarie operazioni
$z^3 = \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}$. Essendo $q = z^3 + y^3$, egualmente
si inferisca $y^3 = \frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}$. Il perché
scopriremo $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}}$
e per conseguenza resta determinata la proporzione
fra le parti z, y componenti la radice x.

Varierà questa proporzione al cangiar dei valori
di p, e di q ~~[illegible]~~. Se p, e q
abbiano una tale grandezza che sia $\frac{1}{4} q^2 = \frac{1}{27} p^3$, sarà
$z = y = \frac{1}{2} x$. Posto $\frac{1}{4} q^2 > \frac{1}{27} p^3$, ed attenendosi ai
segni superiori, riuscirà $z > y$. In tale ipotesi
la ragione fra z, ed y diviene maggior di
qualunque data, quando p sia minima, e trascurabile,
trovandosi in tal incontro $z : y :: \sqrt[3]{q} : 0$
Che se $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$, le parti $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2} \sqrt{-1}}$,
$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2} \sqrt{-1}}$ divengono immaginarie, ed
in una immaginaria ragione si corrispondono,
la quale si cangia in reale, quando $q = 0$, onde abbiasi
$z = \sqrt{\frac{1}{3} p} \sqrt{-1}$, $y = -\sqrt{\frac{1}{3} p} \sqrt{-1}$, e per conseguenza
$z : y :: 1 : -1$. In tal circostanza abbiamo la
formola $x^3 - px = 0$, che essendo divisibile per x,
dà la radice $x = 0$, la quale viene somministrata
dal metodo cardanico, da cui ne risulta $z + y =$
$\sqrt{\frac{1}{3} p} \sqrt{-1}$

$)\sqrt{\frac{1}{3}p}\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{1}{3}p}\sqrt{-1} = 0$. Le altre due radici sono $x = \pm\sqrt{\frac{p}{2}}$.
Dal metodo di mio fratello sarà $q = 0$, quando $n =$
$\frac{1}{3}$. Suggerisce lo stesso le medesime tre radici, ma
diversamente ordinate, cioè $x - 2\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} = x - \sqrt{p} \mp 0$,
$x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = x + \sqrt{\frac{p}{4}} \mp \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{p}{\frac{4}{3}}} = x + \sqrt{\frac{p}{4}} \mp \sqrt{\frac{p}{4}}$
$= 0$, vale a dire $x = 0$, $x + \sqrt{p} = 0$.

Conchiudo aggiungendo una riflessione. Il meto-
do dell'Ab. Vincenzo richiede $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}\right)$.
Qualora $\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}} = 1$, ne proviene $-q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, e conse-
guentemente $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$. Cerco il valore di n^2
in tal circostanza. Poichè $\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}} = 1$, avremo
$3n^2-1 = 1+n^2\sqrt{1+n^2}$, ed alzando al quadrato $9n^4 - 6n^2 + 1$
$= n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1$, e quindi $n^6 - 6n^4 + 9n^2 = 0$. La divi-
sione per n^2, che determina $n^2 = 0$, mi dà $n^4 - 6n^2 + 9 = 0$,
ed estraendo la radice $n^2 - 3 = 0$, o sia $n^2 = 3$. Il perchè
i due soli valori di $n^2 = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$ si adattano al caso di $\frac{1}{4}q^2$
$-\frac{1}{27}p^3 = 0$. Tutte le altre grandezze di n^2 se sono nega-
tive richiedono $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, e se sono positive $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$.
Che se di più $\frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{m}$, posta m quantità razionale,
ovvero $\sqrt{\frac{p}{3}}$, $\sqrt{1+n^2}$ sono amendue numeri quadrati,
ne risulta razionale il valore di q, ed in casi infiniti
il metodo di mio fratello scioglie le equazione $x^3 - px \cdot q$
$= 0$ formata da tre radici reali, ineguali, e incom-
mensurabili, in cui p, q sono quantità razionali.

Il metodo di mio fratello si estende ancora a scio-
gliere le equazioni, nelle quali p, q, e le tre radici sono
razionali; ma ciò non serve al presente intento.

Nobile Sig.r Conte Sig.re e Prone stimo. n 59

Nobile Sig.r Conte Sig.r e Prone Stimo. n. 69

L'Accademia di Scienze, Lettere, ed Arti recentemente fondata in Padova coll'autorità e protezione immediata del Principato, se ha per una parte lo svantaggio di nascere in un tempo, in cui la fama di tante illustri Accademie diffusa per tutta l'Europa la espone a de' pericolosi confronti, ha però dall'altra il conforto di trovare in seno all'Italia, e specialmente al felicissimo Dominio Veneto, un numero considerabile di illustri soggetti, i quali e col nome e coll'opere possono esserle e di sussidio, e di fregio. Tra questi essendole noto che Ella si distingue singolarmente per prove di Dottrina e di Ingegno, crede la medesima di procacciare a se stessa onore, e vantaggio coll'aggregarla al suo corpo, come uno de' Fedeli Soci dello Stato. Quindi essa ci commette di parteciparla, sperando che V. S. Ill.ma vorrà aggradire questo attestato della sua stima e fiducia; e che vorrà dargliene opportuni riscontri inviandole qualche produzione del suo talento, di cui l'Accademia farà, secondo le sue leggi, quell'uso stesso, che è per fare delle produzioni degli altri suoi membri qui commoranti. Le sarà poi spedita opportunamente la copia degli Statuti, unitamente al Ruolo degli Accademici, in cui sarà inserito il di Lei nome, al qual oggetto è prima pregata d'inviarci i proprj titoli sì personali, che di famiglia. Per tutto ciò ch'Ella crederà bene di communicare all'Accademia, avremo noi il grato offizio di servirla di mediatori ed interpreti, siccome abbiamo la singolar compiacenza di riconoscere in Lei un Collega così riguardevole, e di protestarle colla più giusta e sincera estimazione

Padova 14. Agosto 1779.

Di Lei Nob. Sig.r Conte

Dev.mi Obb.mi Serv.ri

Matteo Franzoja Seg.rio per le Scienze

Melchior Cesarotti Segret.o per le Lettere

Nob. Sig.r Co. Giordano Riccati Trevigo.

Tuedi

La m
pre
Sog
pub
e si
vec
abb
agg
SS
di
essa
co
per
el
dll
qua
con
al
la
stud
Domi
ricc
ha
con
me
Sig
M

Ill.mo Sig.re Sig.re P.rone Col.mo 273 .63

Tardi rispondo alla stimatissima sua dei 20 Luglio, perchè [da]
... non mi ha trovato in Treviso. Io m'era trasferito a

Ill.mi Sig.ri Sig.ri P.roni Col.mi 271

La nostra Italia, e specialmente il felicissimo Dominio Veneto sono senza dubbio sempre stati forniti d'un numero considerabile di illustri Soggetti, che colle loro fruttuose applicazioni, e colle opere pubblicate hanno promosse le Scienze, le Lettere, e le Arti, e si sono resi famosi. Che poi codesta Reverit.ma Accademia recentemente fondata in Padova con ottimi auspicj abbia rivolto gli occhi verso l'umilissima mia persona aggiungendomi al suo corpo, come uno de' sedici Soci dello Stato, io lo giudico cagionato da ciò ch'io doveva essere per le istruzioni Paterne, e pel continuo carteggio coll'Ab. Vincenzo amatissimo mio Fratello. A questa scelta tanto per me favorevole e gloriosa cercherò di corrispondere col massimo impegno rassegnando col mezzo di V.S. Ill.me all'Accademia qualche mia produzione, di cui farà quell'uso, che le sembrerà più opportuno. Ricevei con sommo piacere la copia degli Statuti, unitamente al Ruolo degli Accademici, di cui ho l'onore di godere la colleganza. Per dir il vero ho sempre coltivato gli studi per fuggir l'ozio, nè a veruna scientifica Accademia mi sono procurata l'aggregazione; e quindi riconosco più decorosa quella che spontaneamente mi ha offerto codesto Illustre Consesso, e che V.S. Ill.me con tanta gentilezza mi hanno partecipata, alla quale mi protesto col maggiore rispetto

Di V.S. Ill.me

Treviso 17 Agosto 1779.

Divot.mo Obb.mo Oss.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mi Sig.ri Matteo Franzoja Seg. per le Scienze
Melchior Cesarotti Seg. per le Lettere

e ri=
dopo
cosono
le mie
ico
nel
issimo
non
ze ime
ommen
nenze
assolu
ze ra
izamen
zo, ossia
l Eine
lere in
ed il
e dover
mine
a te l
nelesima

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo

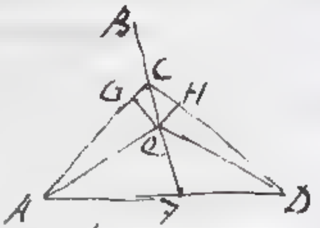
...di rispondo alla stimatissima sua dar 20 Luglio, perchè ...da
... non mi ha trovato in Treviso: Io m'avea trasferito a

... e ric
... dopo
...co sorzo
...le mie
...ruo
... nel
...issimo
... non
...ze ime
...ommen
...nenze
...assolu
...se ra
...icamen
...ro, osia
... Eine
...lare in
... ed il
... dover
...mine
...ate l'...
...nelissima

udi
ass
Ca
mi
ci
(i
som
ratt
h, i
Se
(G
$x^2 +$
c, n
va
$2x$
e f
no
e pr
x - 4
che
n =
ma
due
tà
vatt
$= \frac{1}{2}$
qua
h >
Attuo

…di rispondo alla stimatissima sua de' 20 Luglio, perchè essa non mi ha trovato in Treviso. Io m'era trasferito a Castelfranco per prendere l'acqua di Recoaro, com'è mio costume di ogni anno.

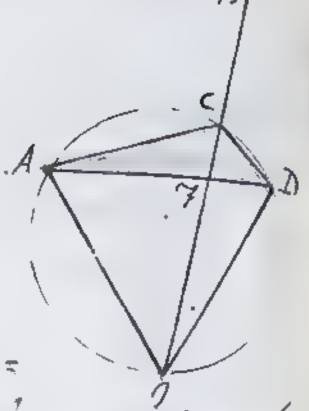
…a considerar le seguenti riflessioni. Sia C il punto, che determina la minima somma $BC + AC + DC$. Condotta la retta $BC7$, taglio l'infinitesima $Ce = d$, e coi centri A, D descritti gli archetti eG, eH, sia $CG = x$, $CH = y$. Se è minima la somma $BC + AC + DC$, si dee avere $CG + CH = Ce$, o sia analiticamente $x + y = d$. Dunque $x^2 + y^2 = nd^2$. Dalla formola $x + y = d$ ne risulta $y = d - x$, e per consequenza $y^2 = d^2 - 2dx + x^2$. Sostituito questo valore nell'equazione $x^2 + y^2 = nd^2$, scopriremo $2x^2 - 2dx + d^2 = nd^2$, e quindi $x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2 = \frac{2n-1}{4} d^2$, e finalmente $x = \frac{1}{2}d\,(1 \pm \sqrt{2n-1})$. Nello stesso modo troveremo $y = \frac{1}{2}d\,(1 \pm \sqrt{2n-1})$. Tre casi possono darsi.



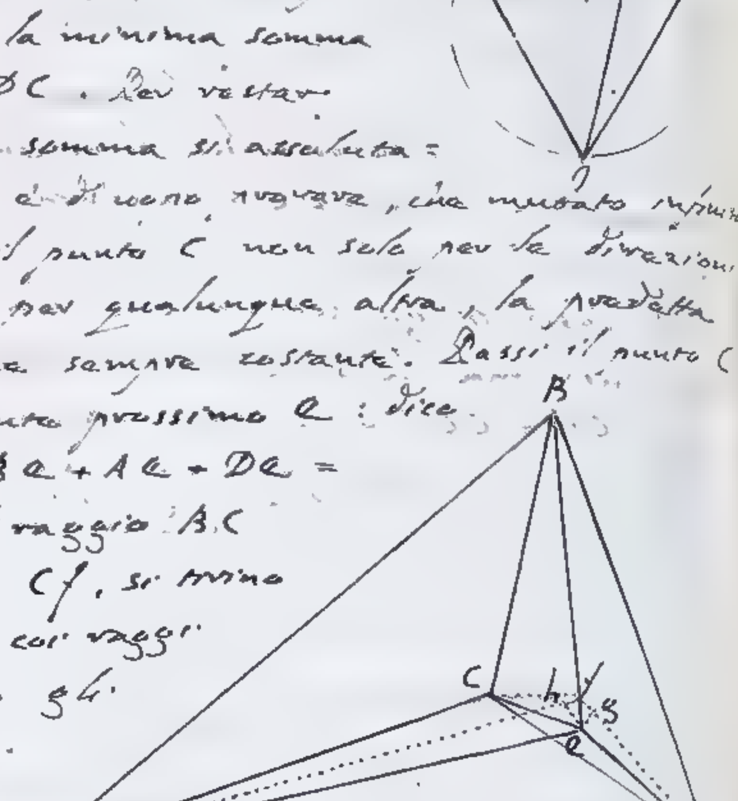
I. primieramente sia $x = y = \frac{1}{2}d\,(1 \pm \sqrt{2n-1})$. Ora poichè $x + y = d$, ne inferiremo $x + y = d = d\,(1 \pm \sqrt{2n-1})$, formola, che ci insegna dover essere $2n - 1 = 0$, e per consequenza $n = \frac{1}{2}$. La nostra minima somma adunque necessariamente richiede, quando $x = y$, $n = \frac{1}{2}$, onde si abbiano le due formole $x + y = 2x = d$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}d^2$. Ella è proprietà dell'angolo $ACD = 120°$ diviso per metà dalla retta $BC7$, che sia $CG = CH = \frac{1}{2}Ce$, e perciò $\overline{CG}^2 + \overline{CH}^2 = \frac{1}{2}\overline{Ce}^2$. Il perchè si avrà la minima somma $BC + AC + DC$, quando l'angolo $ACD = 120°$ sia bipartito dalla linea $B7$. Descritto pertanto sopra AD il triangolo equilatero AID

Illmo Sig. Gian Francesco de' Malfatti
Ferrara

Divotmo Obblmo Servitor Vero
Giordano Riccati



AID, e circoscritto il circolo ACDIA, si congiungano i punti B, I colla retta BI, la quale taglierà il cerchio nel punto C, che determinerà la minima somma cercata BC + AC + DC. Per restar convinti, che questa somma sia assoluta=mente minima, egli è di uopo provare, che mutato infinitamente poco di sito il punto C non solo per le direzioni CB, CA, CD, ma per qualunque altra, la predetta somma si mantiene sempre costante. Passi il punto C nel sito infinitamente prossimo e: dico essere la somma Be + Ae + De = BC + AC + DC. Col raggio BC descritto l'archetto Cf, si tirino le linee Af, Df, e coi raggi Ae, De si segnino gli archi minimi eh, eg. La linea Cf tocca l'ellisse, i cui



fochi A, D, che passa pel punto C, e conseguentemente ancora pel punto f. Avremo dunque AC + DC = Af + Df = Ae + De + hf + gf; e perchè l'angolo AfD = 120° adequatamente viene diviso per metà dalla retta Bfe, che si può considerar parallela a BC, ne segue essere hf + gf = fe, e quindi AC + DC = Ae + De + fe; ed aggiungendo le linee uguali BC, Bf, scopriremo BC + AC + DC = Ae + De + Bf + fe = Ae + De + Be, come si dovea dimostrare.

Passo agli altri due casi, che suppongono, l'uno $x = \frac{1}{2}d\cdot(1+\sqrt{2n-1})$, $y = \frac{1}{2}d\cdot(1-\sqrt{2n-1})$, e l'altro $x = \frac{1}{2}d\cdot(1-\sqrt{2n-1})$, $y = \frac{1}{2}d\cdot(1+\sqrt{2n-1})$, i quali sembra che possano servire alla soluzion del problema; perchè se il punto C (Fig. 2.) si cangia di sito per la dire= zione BC, danno CG + CH = Ce, e perciò BC + AC + DC = Be + Ae + De. Lo stesso, tuttavia non addiviene, se il punto C muta posto per diversa direzione. Si contenti lo stimatissimo Sig. Abate, ch'io consideri la sola ipotesi di n = 1, che determina x = d, y = 0, o al contrario, e $x^2 + y^2 = d^2$. Dato il triangolo ABD, e supponendo x = 0, y = d, si tiri AC normale a BD. La somma BC + AC + DC avrà l'apparenza di esser minima; imperciocchè trasferito il punto C in e per la dire= zione BC, e condotta la linea Ae adequatamente uguale ad AC, scopriremo BC + AC + DC = Be + Ae + De. Ma sparisce ben tosto l'inganno, movendo il punto C in K per la direzione CA. Ed in fatti essendo BK = BC, DK = DC, manifestamente si scopre, che la somma AK + BK + DK cala dall'altra AC + BC + DC, per la lineetta KC infinitesima del primo grado.

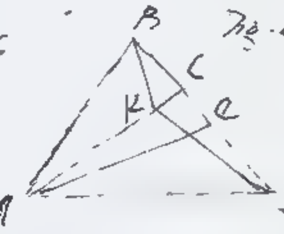


Fig. 2.

Mi riservo di terminar di rispondere alla sua lettera nella settimana ventura, e con pieno rispetto mi dichiaro

Treviso 20 Agosto 1779. Di V.S. Ill.ma

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli
Modena

Ill.mo Sig. Gian Francesco de' Malfatti
Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Servitor Vero
Giordano Riccati

27 61

Illmo Sigre Sigre Prone Colmo 277

Ho letto con mio dispiacere in un Foglietto, essere morto costì il Sig. Ab. Alessandro Zorzi, e che il suo Prodromo all'Enciclopedia Italiana si sarebbe stampato in Siena. In questo Prodromo è contenuta la mia Dissertazione sul Suono Falso. Il Sig. Abate avea fatto incidere le figure in rame, e nel passato Dicembre me ne spedì un esemplare, acciocchè l'esaminassi, e ne correggessi gli errori, dandomi speranza, che in Quaresima l'Opera potrebbe pubblicarsi. Questa è l'ultima sua lettera, che ho ricevuta, e quel ch'è successo posteriormente in riguardo alla detta edizione mi è affatto ignoto. La prego adunque a prendere informazione se il Prodromo realmente si stampa, e posto che no di ricuperare il mio M.S., e d'inviarlo a Modena al Sig. Ab. Troili unitamente colla stabilita correzione. Una tale mia premura mi porta il vantaggio di rinnovarle gli attestati della mia servitù, esibendomi ai suoi pregiati comandi, e di protestarmi costantemente

Di V.S. Illma

Treviso 20. Agosto 1779

Illmo Sig. Gian Francesco de' Malfatti
Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Servitor Vero
Giordano Riccati

2 > 67

2 > 8

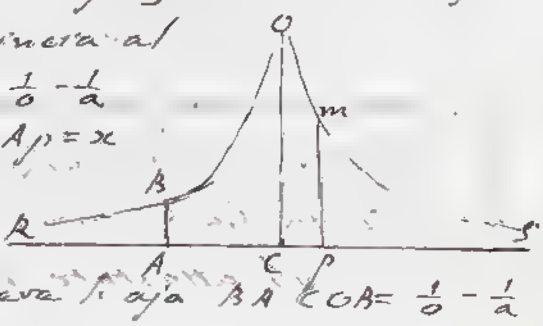
Ill.mo Sig.re Sig.re Padrone Col.mo 279 483

...ra

...l ri=
...dopo
...co sotto
...le mie
...uo
... nel
...issimo
...non
...re ime
...mmen
...mente
...assolu
...re ra
...izamen
...ro, ossia
...l Gine
...lere in
... ed il
...e dover
...mine
...ate l...
...nedesima

27 67

detto nella mia lettera degli 11. Giugno, che nell'ipotesi di $x >$ a, l'aja variabile cominci al centro; perchè l'aja BACOB $= \frac{1}{0} - \frac{1}{a}$ è costante. Quando adunque Ap $= x$ supera AC $= a$, mi è permesso di cercare l'aja OCpmO $= \frac{1}{0} - \frac{1}{x-a}$, a cui devo aggiugnere l'aja BACOB $= \frac{1}{0} - \frac{1}{a}$, onde ne risulti l'aja totale BApmOB $= \frac{2}{0} - \frac{1}{a} - \frac{1}{x-a}$.



Posto che l'aja variabile principiasse da A, si avrebbe BApmOB $= \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$. Ma queste due espressioni hanno da significare l'aja stessa BApmOB; dunque dee passare fra loro eguaglianza. In amendue $\frac{1}{a}$ pareggia la superficie RABR. Nella prima si dee questa sottrarre dall'aja RS mOBR $= \frac{2}{0}$, da cui va parimente sottratta l'aja mpSm $= \frac{1}{x-a}$, acciocchè rimanga l'aja cercata BApmOB $= \frac{2}{0} - \frac{1}{a} - \frac{1}{x-a}$. Nella seconda il termine più che infinito $\frac{1}{a-x}$ dinota la superficie RpmOBR, da cui si dee togliere l'aja RABR, affinchè resti l'aja BApmOB. Ella conchiude, che avuto riguardo alle due espressioni $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-a} =$ RpmOBR + mpSm $=$ RSmOBR $=$ RCOBR + OCpmO + mpSm $= \frac{1}{0} + \frac{1}{0} -$ mpSm + mpSm $= \frac{2}{0}$. Fatto il calcolo si trova $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-a} = \frac{0}{-(x-a)^2}$, cioè a dire uguale al nulla diviso per una quantità negativa. Ella sa, che $\frac{0}{0}$ può eguagliarsi all'infinito. Quindi dividendo

Se ... si corrispondevano le stesse ... della coordinate, si corrispondevano le stesse ... N : n; e quindi N.0 : n.0 :: N : n. Usato in tal modo il metodo del Cavalieri, ci dà il vero; ma se

va
l ri=
dopo
cco sopra
le mie
uo
nel
issimo
non
ze imme
ommon
nenze
assolu
se ra
izzamen
ro osia
l Eine
lere in
ed il
e dover
mine
ate l
nelesima

260

dividendo in tale supposizione il nulla per una grandezza negativa, ne dee risultare $\frac{0}{-(x-a)^a}$ uguale al più che infinito, che nel caso presente pareggia la quantità $\frac{a}{0}$. Ho cercato di svelare i misterj dell'Analisi colla scorta della Geometria, la quale mai non inganna. Le rinnovo gli attestati della mia divozione, e mi rassegno

Di V. S. Ill.ma

Treviso a 7. Agosto 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Contarelli
Modena

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati.

se or— , si corrispondevano sempre stesse
della coordinata, . Usata in tal
N : n ; e quindi N.o : n.o :: N : n ;
modo il metodo del Cavalieri, ci dà il vero ; ma
se

:63

da

l ric
dopo
co sopra
le mie
uo
nel
issimo
non
ze im
omman
nenze
assolu
ce ra
izzamen
ro, ossia
l Line
lore in
; ed il
c dover
mine
ate l
nelesima

Nobile Sig.r C: Prone Colmo 2 5 3

S. Simone e Giuda Padova

2 1 Aprile 1 1 7 1

Illmo Sigre Sig.re Prone Colmo 2 8 1

...ccrado, che la nostra amichevole controversia si possa age=
...volmente conciliare, Sig. Ab. Rimo, purchè da Lei si
...accordi, che i zeri cautamente maneggiati sono atti
...a condurre al vero, e che da me si conceda, riuscire
assai pericoloso e lubrico l'uso dei zeri. Per evitare
più accertatamente gli sbagli, è stato rettamente sosti=
tuito il metodo delle flussioni, le quali, quando stanno
per annullarsi, ci manifestano in qual proporzione si cor=
rispondano con esattezza geometrica, e ci guidano con
sicurezza alla soluzion dei problemi. Il metodo degli
Indivisibili del Cavalieri, ch'è riuscito tanto profitte=
vole, consisteva a ben intenderlo, nel maneggio dei
nulla. Misurava egli le linee coi punti, che sono nulla
... ; le superficie colle linee, che sono nulla superfi=
ciari; i solidi colle superficie, che sono nulla solidi.
...; ... quanta circospezione ci voglia, acciocchè un
tal metodo non ci guidi alli errori. Il metodo delle flus=
sioni risolve le linee in linee, le superficie in superficie,
i solidi in solidi. L'elemento per esempio della superficie
si esprime per y.dx, ovvero per ny.dx; e secondo
... vari angoli, che formano le coordinate x, y, possono
... [illegible] ... i valori tutti dalli unità sino al
nd'n ... ; ... la prima espressione y.ndx, e ponendo
nulla. Scelgasi la prima espressione ... l'aspetto y.(n.0)
dx = 0, il prodotto elemento ...
... non differiscano, salvochè nelli angoli
...le superficie ... si corrispondevano le stesse come
delle coordinate, ... N.0 : n.0 :: N : n. Usato in tal
N : n ; e quindi
modo il metodo del Cavalieri, ci dà il vero; ma

se

l ri=
dopo
co sono
le mie
...
nel
issimo
non
re ... me
...
nonze
assolu
ce ra
...
...
...
lere in
ed il
...
mine
...
nelesima

se io supponessi essere $N \cdot 0 :: n \cdot 0 :: 1 : 1$, caderei in paralogismo. Bisogna tener fisso in mente, che il zero è capace di infiniti fattori e le particolari circostanze ci insegnano quali fattori debbano usarsi. Dalla equazion vera $a^2 \cdot 0 + a\sqrt{-1} \cdot 0 = a^2 \cdot 0$, o sia $0 \cdot (a^2 + a\sqrt{-1}) = 0 \cdot a^2$ si desumono i valori dei due fattori del nulla, la diversità dei quali non mi permette di dividere l'equazione pel nulla fornito dallo stesso fattore, onde falsamente ne risulti $a^2 + a\sqrt{-1} = a^2$. Potendo a $\frac{0}{0}$ competere infinita grandezza dal nulla sino all'infinito, qual maraviglia che sia $\frac{0}{0} = \frac{a^2 + a\sqrt{-1}}{a^2}$. Dimanda l'stimatissimo Sig. Abate, se $\frac{1}{0}$ significa l'infinito assoluto; cosa dinoterà $\frac{1}{0 \cdot 0}$? Rispondo, che $\frac{1}{0}$ si eguaglia ad un infinito assoluto lineare, ed $\frac{1}{0 \cdot 0} = \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0}$ all'infinito assoluto superficiale, e quindi $\frac{1}{0} : \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0} :: 1 : \frac{1}{0} :: 0 : 1$. Non le dia fastidio che il metodo dell'Eulero richieda un infinito assoluto, perché in tal guisa $\frac{y}{n}$ equivale a dy, flussione, che per avere l'esattezza geometrica, bisogna finalmente supporre, che si annulli.

Della mia riflessione ne faccia pure quell'uso, ch'Ella creda opportuno, e desideroso di leggere, e di gustare la sua Memoria, pubblicata che sia, mi confermo costantemente quale ho l'onore di protestarmi

Di V.S. Illma

Treviso 27 Agosto 1779.

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli.
Roma.

Divotmo Obblmo Servitore
Giordano Riccati

Nobile Sig.r Co: Primo Cotmo

S. Simone e bue da Padova
2d [illegible]

l ri=
dopo
cco sozo
le mie
ruo
nel
issimo
non
ze ime
ommon
nenze
assolu
se ra
icamen
ro osia
l fine
lare in
ed il
e dover
mine
ale l
nelesima

pre
mera
quale
li oc
soccor
primo
ricon
della
che in
quib
rebb
scus
i la
mal
inc
on a
el se
ual s
so i
inaz
del
ltra

Nobile Sig.r Co: Prone Col.mo

S. Simone e Giuda Padova
21 Agosto 1779

Il pregiatissimo suo secondo foglio giuntomi ai 18 mi ha ritrovato sul ri=
mettermi agli analitici studi dopo i miei sacri oratorii impegni e dopo
qualche giorno di divertimento per ristorarmi dalle fatiche. Ed ecco sotto
gli occhi ed i riflessi perspicacissimi di V.S. il proseguimento delle mie
osservazioni che contiene la risposta alla seconda difficoltà del suo
primo foglio ed insieme la risposta agli esempi da V.S. oppostimi nel
secondo riguardo di quali io sono e sempre stato sono persuasissimo
della utilità della formola Cardanica cui solo tengo essere non
che inutile ma propriamente assurda nel caso detto volgarmente im-
possibile sotto il qual titolo s'intende il caso di tre radici incommen-
surabili non mica solo relativamente fra loro ma separatamente
ciascuna da se assolutamente o se si voglia rapporto all'unità assolu-
ta: laddove negli esempi da V.S. recati essendovi una radice ra-
zionale non sussiste certamente il carattere di tre radici assolutamen-
te incommensurabili sebbene restino incommensurabili fra loro ossia
non abbiano commune misura come V.S. stessa si esprime sul fine
del secondo esempio espressione che mi ha condotto ad intendere in
qual senso erano da lei prese le altre sue espressioni [illegible] ed il
caso irreducibile. Mi professo però a V.S. obbligato per le due deter-
minazioni riguardanti l'una il tramutamento dell'ultimo termine
della massima radice dell'equaz. (B) di irrazionale in razionale l'al-
tra dei casi di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$ nella stessa equaz. (B) da V.S. medesima

aggiunte alle miedue. Nè a stupore si sarà recato che a me sfuggir
nella necessità di dividere l'applicazione al oggetti tanto div
ti quanto sono le verità della quantità e le verità della morale
gelica l'analisi specolativa delle prime e l'analisi prattica delle se
de. La ringrazio della notizia favoritami della Dissert. del Sig.r M
fatti e ritrovandosi della raccolta in cui sta inserita mi far
grazia a darmene contezza. Esaminando il metodo del Sig.r Nic
esposto negli Att. dell'Ac. di Parigi an. 1741 per determinar le
dici dell'equaz. $x^3 + px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$ mi sembra di trovarvi un pa
logismo nel passaggio che fa dagli esponenti interi ai rotti: gra
il suo per me grato parere. Desidero sapere se la Memoria spe
ta dal Sig.r Col. Lorgna all'Ac. di Bologna e da lei citata nella
sua prima lettera sia peranche stampata: poiche quantunq
non esista nei tomi che si hanno in questa Bibl. Pubblica non ne
inferisco che non sia alla luce in qualche tomo non ancora pro
dotto. Grave miseria deplorabilissima che in una Città nella
le da più secoli fiorisce una Università ed ultimamente si è
ta così Accademia sulla forma delle più illustri manchi il pr
dimento necessario degli Atti delle Accademie stesse primarie d
Londra di Berlino di Pietroburgo e quei che vi si trovano so
imperfetti. Per diminuire il volume ho fatto trascrivere la
tere più ristretto e minuto del mio i fogli. Il Sig.r Lodovi

nozze si unisce a me unanime nel mentre che a V. S. rasse=
gno i sinceri sentimenti della mia stima ed ossequio raffer=
mandomi

Di V. S. Ill.ma

Umil.mo Dev.mo Obbl.mo Ser.re
Pietro Cossali teatino

Osserv. 11. Poichè l'equaz.ne (B) non può tramutarsi nell'equaz.e (A) dovrebbe ciò bastare per provar che la forma di x mista di porzioni reali e imaginarie qual è in genere $x = z + y = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \sqrt{-1} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \sqrt{-1}$ non può trasferirsi dall'equaz.e (B) all'equaz.e (A). Ma eccone una dimostrazione diretta e convincente. Abbia la equaz.ne (A) la sua prima massima radice della espressa mista forma. Per elisione delle porzioni imaginarie sarà dunque $x = 2\sqrt[3]{a}$ il qual valore sostituito nell'equaz.e (A) $x^3 - px - q = 0$ darà $8\sqrt[3]{a^3} - 2p\sqrt[3]{a} - q = 0$, in cui il primo e secondo termine o saranno ambidue irrazionali o tale almeno sarà uno di essi. Nel 1.o caso il termine q essendo il solo razionale non potrà esser distrutto, e nel 2.o caso potrà bensì esser distrutto q da quello dei due termini primo e secondo, che sarà razionale, ma l'altro di essi due che sarà irrazionale non avrà contrario capace a distruggerlo. Dunque o nell'uno, o nell'altro caso l'equaz.e (A) non potrà esattamente andar a zero. E perchè vi andasse sarà necessario o che q sia irrazionale essendo $\sqrt[3]{a}$ irrazionale, che è il caso dell'equaz.e (B) o che essendo q razionale sia ad un tempo $\sqrt[3]{a}$ razionale che è il caso dell'equaz.e che chiamerò (B'), in cui si trasmuta (B) perdendo tutt'insieme e la irrazionalità dell'ultimo termine q e la irrazionalità della massima radice. Laonde riguardo a queste due equaz.i (B), (B') valendo i teoremi di $x = z + y$ di forma mista sarà legittimo nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ lo spezzamento di tutta la equaz.e in due parziali solito a farsi e legittima per la stessa ragione la formola quindi tratta (C). Ma riguardo all'equaz.e (A) che non ammette per la espressione della sua massima x la detta forma mista, valendo i teoremi opposti di $x = z + y$ di forma interamente reale sarà nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ assurdo quello spezzamento ed assurda conseguentemente la formola (C). Per la qual cosa si vede esser necessario il distinguere a qual equaz.e nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ si riferisca la formola (C): riferita all'equaz.i (B), (B') ha carattere di legittima, e riferita all'equaz.e (A) riceve carattere di assurda: carattere cui tre condizioni concorrono a costituire, 1.a di q razionale, 2.a di x irrazionale, 3.a di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$: le prime due in quanto insieme unite impediscono di applicare ad x la forma mista, la terza in quanto rendendo $< \frac{1}{3}p\,(z+y)$ rende ad un tempo e conseguentemente assurdo il solito spezzamento di tutta la equaz.e in due.

Osserv. 12. Anche trattandosi dell'equaz.i (B), (B') la formola (C)

quantunque ad onta di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ legittima comparisca, assurda per il radicale imaginario $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$. Ma io distinguo per lo appunto assurdità reale e assurdità apparente. Chiamar si deve assurdità reale quella che nasce da una relazione che si vuol introdurre contro natura qual è il riferire nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ la formola (C) all'equazione (A). Chiamar si deve assurdità apparente quella che nasce da implicazione di termini imaginarj che provien dalla conformazione delle parti di x e che poi svanisca con opportuno svolgimento; ciò che accade trattandosi dell'equazione (B) (B').

Osserv. 13. Mi è facile adesso passare alla seconda difficoltà e scioglierla in un modo che almeno atteso l'oscurità della materia debba essere soddisfacente. Mi oppone V. S. che svolgendo nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ la formola (C) si ha una serie libera da quantità imaginarie e tutta di termini reali composta che è la seguente (R) $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\,\{1 + \frac{1.2}{1.2}\left(2\sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2}\right)^2 - \frac{1.2.5.8}{1.2.3.4}\left(2\sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2}\right)^4 + \frac{1.2 \ldots 14}{1.2 \ldots 6}\left(2\sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2}\right)^6 \ldots\}$ dalla realità dei termini di questa serie concluder si suole che la formola (C) quantunque apparentemente nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ imaginaria veracemente però è reale. Né io nego per ogni parte tal conclusione solo esigo che non si estenda all'equazione (A) alla quale ho dimostrato, la formola (C) nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ per nissun conto appartiene, né rapportar si può senza che riceva un carattere di assurdità non mica apparente che con destro svolgimento può svanire, ma vera e contro natura introdotta la quale resiste agli artifizj analitici né per essi si dilegua ed il solo mezzo di toglierla è correggere l'errore commesso in introdurla.

Osserv. 14. Domando infatti agli analisti in 1.° luogo a qual equazione riferir si debba in qualità di radice la serie (R)? io non trovo che siasi occupato in tale ricerca che pure a mio parere era essenziale. Veggo bensì che comunemente si è rapposto senza dubbio veruno che la serie (R) rappresenti la massima radice di qualunque equazione di terzo grado, che abbia tre radici reali ineguali irrazionali ed $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$. Ma qual fondamento di tal indubitato supposto? Finché non ne adducano alcuno io attenendomi alle mie dimostrazioni mi crederei in diritto di proporre che siccome la formola (C) non si può senza assurdità riferire all'equazione (A) nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ così non vi si possa riferire la serie (R) quale svolgimento della massima radice sua reale. E mi accorgo certamente come con ciò resti tolto il frutto precipuo che si vuol trarre dalle invenzioni del Nicola di dimostrare

per mezzo di essa serie $(R) = x = z + y$ e di due altre $(R')(R'') =$
$R + (R - y) \times \pm\sqrt{-3}$ la realità delle tre radici dell'equaz.^e (A) nel
caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$. Ma questa verità si sa per altra via più
piana e sicura senza bisogno di arbitrarj falsi ed assurdi supposti, ed
altri frutti hà la serie (R).

Osserv. 15. Ma io procedo avanti ed entro a cercare nella serie (R)
se scuoprir si possa qualche indizio, che determini o generalmente, o
particolarmente di qual equaz.^e si rappresenti per essa la radice.
Il qual preliminare si faccia che il caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ si può anche espri-
mer così $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$ intendendo per m generalmente un numero
qualunque intero o misto con frazione od anche una quantità irrazio-
nale maggiore dell'unità. Il che posto io osservo che il Sig.^r Lorgna
accintosi con coraggio pari alla sua abilità ad investigare e distinguere
i casi ne' quali la serie (R) da principio in progresso costantemente
converge, quelli ne' quali da principio converge in progresso diverge,
quelli ne' quali da principio in progresso costantemente diverge, stabi-
lisce per limiti della costante convergenza $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$, $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\frac{20}{10}$
per limiti della inizial convergenza e successiva divergenza
$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\frac{20}{10}$, $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\frac{37}{10}$ per limiti della costante divergenza
$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\frac{37}{10}$, $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\infty$ infinitamente fra se distanti. Or io mi
prendo per le mani l'equaz.^e (B) riguardo alla quale generalmente
si ha $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\left(\frac{\overline{1+n^2}^3}{\overline{3n^2-1}^2}\right)$ ed esploro il massimo valor di $\frac{\overline{1+n^2}^3}{\overline{3n^2-1}^2}$ perciocchè
applicato il metodo de' massimi ritrovo $n = \pm 1$ che sostituito dà il
massimo valor di $\frac{\overline{1+n^2}^3}{\overline{3n^2-1}^2} = 2 = \frac{20}{10}$ e per conseguenza i limiti
infimo e supremo di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\left(\frac{\overline{1+n^2}^3}{\overline{3n^2-1}^2}\right)$ sono $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$,
$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\frac{20}{10}$ gli stessi della costante convergenza della serie (R).
Dunque la prima radice dell'equaz.^e (B) si rappresenterà generalmente
dalla serie (R) nella condiz.^e della costante convergenza e la equaz.^e
(N) del Nicole che nella stessa (B) si comprende supponendo $n = 1$ cor-
risponderà al limite supremo della costante convergenza della serie
(R) nel quale essa serie verrà a presentare la di lei prima radice.
Questa relazione tra la costante convergenza della serie (R) e la prima
radice dell'equaz.^e (B) è tanto più rimarcabile quanto che il Sig.^r Lorgna

chiamo giustamente la serie (R) seriem casus irreducibilis e per

l'altra parte dal caso irreducibile esclude l'equaz. (A). La (B) è

ogni altra di simil forma onde parerebbe che similmente la prima

loro radice restasse esclusa dall'essere rappresentata dalla serie (R).

E ben convengo col chiarissimo Analista che le equaz. di forma simile alla (B) non appartengano al caso irreducibile che propriamente restringesi si vuole all'equaz. (A) ma io sono sforzato a discordare da lui e diametralmente oppormegli pensando che nessuna la serie (R) appartenga al caso irreducibile ossia all'equaz. (A) ma sibbene appartenga alle equaz. di forma simile alla (B).

Osserv. 16. Tra codeste equaz. di forma simile alla (B) ma di molto più estese anzi la più estesa conosciuta finora sono le due (intendendo per K numero intero positivo e per n similmente)

$$(H)\ x^3 - px \pm \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{2}{r}\cos.\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n}\right) = 0$$

$$(H')\ x^3 - px \pm \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{2}{r}\cos.\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n\cdot 5}\right) = 0.$$

delle quali dimostra il Sig. D'Alembert (Act. Ac. Berl. an. 1746) che la prima radice ammette espressione analitica della forma $(A+B\sqrt{-1})$ $+(A-B\sqrt{-1})$ che è la forma da me chiamata nuda nel caso della quale la formula (C) al caso del caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ è legittima e per conseguenza inutile la serie (R). Dunque da questa serie (R) deve essere rappresentata la prima radice delle equaz. (H) (H') ora nell'equaz. (H) si ha $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 \frac{r^2}{\cos.^2\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n}}$ e per riguardo all'equaz. (H') $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 \frac{r^2}{\cos.^2\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n\cdot 5}}$. Danno poi $\frac{r^2}{\cos.^2\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n}}$ e $\frac{r^2}{\cos.^2\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n\cdot 5}}$ possono farsi = 1 ponendo tali valori di K ed n che $\cos.^2\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n}$, e $\cos.^2\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n\cdot 5} = r^2$ il che in varie maniere può ottenersi, e possono in secondo luogo farsi ambidue = ∞ dando tali valori a K e tali ad n che sia $\cos.\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n}$, e $\cos.\frac{K\cdot 360^\circ}{2^n\cdot 5} = 0$. Dunque le equaz. (H) e (H') scorrono per uno spazio infinito dal caso $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$ al caso $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2\,\infty$ spazio che comprende tutte le tre condizioni della serie (R) e di costante convergenza e di iniziale convergenza seguita da divergenza e di costante divergenza. Laonde la proposiz.

[illegible]dice delle equaz. (H) (H') sarà rappresentata dalla serie (R) secondo varie determinaz. di $\frac{r^n}{105^n \frac{K.360^\circ}{n}}$, $\frac{r^n}{105^n \frac{K.360^\circ}{n}}$ o nella condizione costante convergenza o nella condiz. di iniziale convergenza e successiva divergenza, o nella condiz. di costante divergenza; Dunque serie (R) non solo nella costante sua convergenza, ma ancora nella iniziale convergenza e successiva divergenza, ed in fine può anche [nel]la costante sua divergenza avrà l'utilità di rappresentare reale [ciasc]heduna radice di equaz. di terzo grado. Se nell'equaz. (H) si farà $= r^{n-3}$ e nell'equaz. (H') $K = 3 . r^{n-3}$ si avrà per l'una e per l'altra il caso di $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2 . \frac{r^2}{105^n . 45^\circ} = \frac{1}{4} q^2 . \frac{r^2}{\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{4} q^2 . r = q^2 \frac{n_0}{16}$ cioè il caso corrispondente al limite supremo della costante [con]vergenza della serie (R). Gli altri casi tutti oltre questo caderanno o [ne]lla incostante convergenza seguita da divergenza o nella costante diver[genza]. Avanti di chiudere questa osservaz. non voglio ommettere il [pa]sso col quale il Sig. D'Alembert termina la citata sua memoria. "Il se trouvoit quelque cas où p et q étant rationels, les racines [fus]sent irrationelles on auroit alors la resolution de quelques equations [appar]tenantes reellement au cas irreductible du 3.e degré, ce que je [laisse] à examiner à des autres." Ecco un luogo nel quale il sommo Mate[mati]co mostra di possedere la vera nozion rigorosa del caso irreducibile [di]stinguendo non potersi esso realmente chiamar tale se non si combina [ins]ieme la circostanza di p e q razionali e di tutte tre le radici irraz[ion]ali, ed emenda una espressione impropria sfuggitagli nella Enciclopedia [all'ar]ticolo del caso irreducibile dicendo di avere il Sig. Nicole da esso [ide]ato e ridotta la sua equaz. (N.) questa questa al caso irreducibile [app]artenesse. Ciò poiché il Sig. D'Alembert lascia ad altri di esaminare [è su]perfluo di averlo già dimostrato non essere vale a dire possibile il [com]binare questa circostanza p e q razionali, radici tutte e tre irrazio[nali] forma $(A + B\sqrt{-1}) + (A - B\sqrt{-1})$

Osserv. 17. Ritornando alla generale espressione $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2 m$ [c]he ha un'infinita estensione da $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2$ ad $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2 \infty$ si tre [classi] distinguo gl'infiniti casi in essa compresi. La 1.a sia di quelli, che [ne]l concorso portano q irrazionale ed x parimente irrazionale come nella [e]quaz. (B) (H (H'); la seconda di quelli, che seco portano q —

razionale ed x parimente razionale come nella equaz.e (B') la terza
quelli che seco portano q razionale ma x irrazionale e questa è la ch
appartenente all' equaz.e (A) ecco pertanto la seconda domanda che io
avanzo agli analisti: se ognuna delle tre distinte classi de' casi si debba
concepir inchiusa nella serie (R) e se concepir si possa salva non solo
realità di ciascun termine separatamente ma eziandio la reale som
il reale valore intero della serie? La distinzione che io accenno è a
necessaria: altro è che una serie abbia reali tutti i suoi termini altro
che dinoti una corrispondente quantità reale dallo svolgimento della q
sia nata e nella quale sommata ritornerebbe a ristringersi. Il Cel. Lag
range alla Propos. XXVIII dimostra che dallo svolgimento di $(-V+x$
reale nel caso di Δ pari ed ad un tempo $x > V$ ne nasce una serie
o mista di convergenza e divergenza o tutta divergente secondo l'eccesso
di x sopra V ma sempre implicata in ciascun de' termini di fatto
imaginario, ed al contrario dallo svolgimento di $(x-V)^{\frac{1}{\Delta}}$ imaginario
caso di Δ pari ed insieme $x < V$ ne nasce una serie o mista di con
vergenza e divergenza o tutta divergente secondo il difetto di x rapp
ad V ma sempre di termini reali interamente composta: onde nel
caso una quantità reale è la somma ed il valore di una serie di
termini imaginarj e per l'opposto nel 2.° caso una quantità imag
è la somma ed il valore di una serie di termini reali, per la qual
si ingannerebbe nel 1.° caso chi per essere imaginarj i termini cre
che la serie dinotasse una corrispondente quantità imaginaria e sim
mente nel 2.° caso chi per esser reali i termini credesse che la serie
dinotasse una corrispondente quantità reale. Io bramerei che il gran
Autore del metodo generale per la somma delle serie convergenti,
Svilupator sagacissimo degli arcani delle serie di qualunque sorte
fosse inoltrato a penetrare intimamente la natura della serie n
dalla formola $(x+V)^{\frac{1}{\Delta}}+(x-V)^{\frac{1}{\Delta}}$ rappresentando V quantità im
maginaria ed acciocchè si fosse altri impresa alla sua attività propo
di indagare i rapporti della costante convergenza della mista converg
e della costante divergenza di essa serie col valor reale od imaginario
sua somma onde determinare i casi di vera nascosta realità o di
intrinseca non che apparente assurdità della formola generale poco p

secondo il rapporto di x ad V e poscia proposto fossero ad applicare gli opposti rapporti alla serie (R) e la figura determinasi alla formola (C) secondo il rapporto di $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}\,\sqrt{-1}$ dipendente dai particolari di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$. non avendo ciò fatto l'industriosissimo analista concependosi per altra parte facilmente dover avere la serie (R) de' ghi cavalieri non sembri strana la mia domanda se o nella condiz. costante convergenza o nella condizione di mista convergenza e divergenza o nella condiz. di costante divergenza la serie (R) ammetta ogni supposiz. $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$ salvo il valor reale della sua somma. Oggi risultando dalle mie dimostrazioni che la formola (C) è intrinsecamente anche apparentemente assurda nella terza classe dei casi di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$ che appartengono all'equaz. (A) non sembri strano se senza ingolfarmi per ora nel pelago delle accennate profondissime indagini in modo converso mi arrogo il diritto di conchiudere che la serie (R) salvo il valor reale di sua somma non ammette i supposti di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$ appartenenti alla terza classe ossia all'equaz. (A).

Osserv. 18. Io so benissimo che l'ingegnoso Sig. Lorgna per sollevarsi della pena che gli cagionava la limitazione della convergenza della serie (R) dal caso $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$ non estesa più oltre che al caso $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 \frac{20}{10}$ ha escogitato l'artificio di rovesciare la formola (C) della seguente guisa $\sqrt[3]{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)} + \frac{1}{2}q\right)} + \sqrt[3]{\left(-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)} + \frac{1}{2}q\right)}$ svolgendola poi dimostra esserne una serie (R') nella quale l'infimo limite di convergenza è $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 \cdot \frac{20}{10}$ quello che è il supremo nella serie (R) e tende indefinitamente ad $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 \infty$. Laonde componendo la estensione finita della convergenza della serie (R) nata dalla formola (C) diritta e la estensione quindi indefinita della convergenza della serie (R') nata dalla formola (C) rovescia stima abbracciati tutti i casi di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$ ed per tutti dimostrato reale la formola (C) che è poi la somma ~~delle due serie~~ delle serie (R)(R').

Sebben io ammiri la destrezza dell'artificio confesso però di non saper acquietarmi sembrandomi che le condizioni della serie nata dalla formola (C) diritta contengano implicitamente quelle della serie nata dalla stessa formola (C) rovescia e il rovesciamento del supremo limite di convergenza della prima serie in limite infimo per la seconda non sia che una necessaria conseguenza del rovesciamento della formola (C) trattone ecco il rovesciamento della serie (R) e che perciò tale rovesciamento nulla c'insegni di più di quello che prima sapevasi della sola serie (R). Io però ho già dimostrato nell'osserv. 16 che la medesima serie (R) non

solo nella sua costante convergenza, ma anche nella sua mista convergenza divergenza e persino nella sua costante divergenza deva aver valore e somma reale in casi innumerevoli divisi poi generalmente nell'osserv. 17. quei [illegible] cioè che portano il titolo di 1.a e il titolo di 2.a classe.

Osservaz. 19. Né ignoro che il lodato Sig. Lovegna sin dal principio della opera (prop. VIII) si studia di dimostrare la verità della formola (C) senza alcuna distinzione di casi di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 m$, e relativamente a qualunque equaz.e di tal general supposto, non eccettuata la (A) che per l'opposto è l'[illegible] che direttamente egli viene di vista perché essa sola giusta le sue definizioni è la vera equaz.e cubica e sulla quale cadono tutte le ricerche intorno il caso irreducibile; salvo però il rispetto dovuto all'insigne analista mi concesso di chiamare ad esame la sua dimostraz.e Pone egli

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = R \pm \sqrt{-S}$ ed elevando alla terza potenza l'uno e l'altro membro dell'equaz.e ne viene

$\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)} = R^3 \pm 3R^2\sqrt{-S} - 3RS \mp S\sqrt{-S}$

e separando i termini imaginarj dai reali

$R^3 - 3RS = \frac{1}{2}q$

$3R^2\sqrt{-S} - S\sqrt{-S} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$

ossia dice egli

$R^3 - 3RS = \frac{1}{2}q$

$3R^2 S - S^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}$

Ma in questa ultima vi è errore dovendosi avere dalla seconda equaz.e tolto il fattor imaginario $\sqrt{-1}$ l'equaz.e seguente $3R^2\sqrt{S} - S\sqrt{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \right.}$ $\left.\frac{1}{4}q^2\right)$ la quale avanti di fare l'eliminazione che subito prescriva l'autore si doveva al quadrato, e si avrà $9R^4S - 6R^2S^2 + S^3 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2$ onde si avranno le due equazioni (I) $3RS + \frac{1}{2}q - R^3 = 0$

(II) $S^3 - 6R^2S^2 + 9R^4S + \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 0$

Dice l'autore che eliminando la S col metodo ingegnoso del prestantissimo Euler negli atti dell'Acc. di Ber. an. 1764 ne proviene all'equaz.e

$R^9 - 18R^8 + 81R^7 - \frac{39}{2}R^6 + 18qR^5 - \frac{81}{2}qR^4 - \left(p^3 - \frac{15}{2}q^2\right)R^3 - \frac{9}{2}q^2R - [illegible]$

e col metodo comune alla più semplice

$R^7 - \frac{9}{4}R^6 + \frac{9q+1}{8}R^5 - \frac{9}{8}qR^4 + \left(\frac{7}{8}q^2 + \frac{9}{8}q - \frac{1}{8}p^3\right)R^3 + \left(\frac{9}{16}q^2 + \frac{1}{16}q\right)R^2 + \frac{3}{16}q^2R - \frac{1}{64}q^3 [illegible]$

Io non ho gli atti dell'Ac. di Berlino per vedere il metodo del Sig. Euler. Ma sono lessi nella teoria delle curve del Cramer una bella tanto quanto breve [illegible] dove egli insegna un metodo facilissimo di eliminazione e ne dà infine la formola generale. Io non possiedo quest'opera imprestatami allora dal gentilissimo [illegible]

... che espressamente Sig.^r Ab. Frisi, né mi ricordo né del metodo né della forma. Mi sono adun: [illegible] servito del metodo commune e sebben avessi già fatto il calcolo [illegible] l'opera del Sig.^r Lorgna ho voluto tuttavia rifarlo adesso per maggior sicurezza e per la [illegible] volta ho ritrovato un equaz.^e di nono grado qual dice il Sig.^r Lorgna risultare [illegible] metodo dell' Eulero ma non solo più semplice di questa ma eziandio riducibile a [illegible] semplicità che quella di settimo grado proveniente [illegible] dal Sig.^r Lorgna per [illegible] dal metodo commune. Ecco la mia equaz.^e $R^9 - \frac{3}{8}qR^6 + \left(\frac{3q^2 - p^3}{64}\right)R^3 - \frac{1}{64.8}q^3 = 0$ [illegible] $R^3 = u$ si riduce ad una di 3.º grado $u^3 - \frac{3}{8}qu^2 + \left(\frac{3q^2 - p^3}{64}\right)u - \frac{1}{64.8}q^3 = 0$. [illegible] semplice certamente che quella di settimo. Prosegue il Sig.^r Lorgna che sim[il]: [illegible] si può fare $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = R - \sqrt{-S}$ onde $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = R + \sqrt{-S} + R - \sqrt{-S} = 2R$ veniamo alla conclusione. [illegible] pertanto l'equaz.^e in R di grado impari e perciò dovendo R avere almeno [illegible] reale così conchiude *Ergo Binomium Cardanicum quantitati reali fit aequale.* *[illegible] itaque est natura formulae cardanicae in casu irreducibili tertii gradus.* Ma sù [illegible] conclusione mi sia permesso un riflesso. Essa infatti non può valere se non per [illegible] equaz.^i di 3.º grado che ammettono la mista forma. $x = R + \sqrt{-S} + R - \sqrt{-S}$. [illegible] ho dimostrato che l'equaz.^e (A) non l'ammette. Dunque rispetto alla radice dell' [equaz.]^e (A) non può valere tal conclusione e perché sia legittima bisogna che sia [par]ticolare, e che il Binomio cardanico ossia la formola (C) si riguardi sotto rap[porto] particolare riferendola alla equaz.^i di 3.º grado che ammettono x di forma mista [e non] sotto rapporto generale che abbracci l'equaz.^e (A) e molto meno sotto rapporto [partic]olare ad essa (A) con esclusione delle altre. E quando l'autore termina con queste [paro]le: *Explorata est itaque natura formulae cardanicae in casu irreducibili 3.^i gradus* [illegible] che la formola (C) appartenga ad applicar si possa al caso irreducibile il quale [illegible] è stesso a cui non appartiene né applicare si può come io ho dimostrato con [illegible] [illegible] le risposte del Cardano, ed il Sig.^r Lorgna potea saperlo dalle dimostraz.^i [illegible] ma egualmente certe del Koenig del quale prop. II. ... VI. premette i [illegible] ma nel corollario susseguente par che abbia voluto modificare non so quali [illegible] ragione essendo legittima e necessaria la conseguenza. Poiché laddove il Koenig [illegible] che nell'applicare il metodo cardanico al caso irreducibile vi è paradossismo [illegible] fisico, contradiz.^e il Sig.^r Lorgna allo incontro ne raccoglie solo la ragione perché [la for]mola (C) nel caso irreducibile involge termini imaginarj riguardandola intanto [in se] medesima come reale, veramente ad esso applicata e lontana da qualunque [ass]urdità e contradiz.^e Solo ciò accade rapporto alle equaz.^i di x esprimibile con [illegible] mista che il metodo cardanico sia giustamente adoperato convenendo la formola [illegible] essendo reale e tuttavia per ragion intima della forma delle parti z ed y di x implicano termini imaginarj ed in apparenza imaginarie.

Osserv. 10. Più io getto l'occhio sulla mia equaz.e videa $u^3 - \frac{3}{4}qu^2 + \left(\frac{3q^2 - p^3}{64}\right)u$ [illegible] $\frac{1}{64 \cdot 4}q^3 = 0$ e rifletto che acciò i tre valori di u siano tutti e tre reali devono (giusta la regola del Campbell di cui io ho una dimostraz.e nuova e non per casi ma dedotta da principio generale estendentesi a tutte le equaz.i di qualunque grado) devono io dico verificarsi le seguenti condiz.i prima $\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}q\right)^2 > \frac{3q^2 - p^3}{64}$ seconda $\frac{1}{3}\left(\frac{3q^2-p^3}{64}\right)$ [illegible] $\left(-\frac{3}{4}q\right) \times \left(-\frac{1}{64 \cdot 4}q^3\right)$. La verità della 1.a condiz.e è evidente; la verità della [illegible] richiede $p^3 > 6q^2$ e dividendo dall'una e dall'altra parte per 27 $\frac{1}{27}p^3 >$ [illegible] che sarà sempre tanto più supponendosi $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ dunque i valori di u saranno tutti tre reali ciò nonostante bisogna avvertire che essendo $R^3 = u$ e pe[rciò] $R = \sqrt[3]{u}$ ed inoltre $= \sqrt[3]{u} \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ quindi R avrà sei valori imaginarj e lo si avrebbe potuto dimostrare immediatamente dalla mia equaz.e in R [illegible] pertanto che significa? se non che la formola $(C) = 2R$ non è per tutti i casi di $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$ in infondo reale, ma bensì in fondo ancora non che in apparenza per taluni imaginaria e lo stesso sarà della serie (R) nella quale si svolge ad onta della realità di ciascun suo termine. Questa è un'avvertenza sfuggita al Sig.r Cosson e che pur era necessaria e non bastava arrestarsi a notare che un valor di R doveva essere necessariamente reale essendo l'equaz.e in R di grado impari. Io mi riserbo in altro tempo a sviluppare meglio la cosa.

Osserv. 11. Codesto celebre Analista in nessun luogo della sua opera dispiegò meglio il suo raro talento analitico che sul fine dove con un metodo diverso a vela[re] all'intima costituz.e della serie (R) perchè tolto ed incominciato dalle serie sue com=ponenti e con un ingegnoso maneggio di differenziazioni ed integrazioni esplora la natura della stessa serie (R) cui finalmente chiamando S la somma medesima $= x$ e scrivendo $y = \frac{S}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}} = \frac{x}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}}$, e $z = \frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}$, scuopre dipendere dall'integraz.e dell'equaz.e differenziale di secondo ordine $(1+qz^2)ddy +$ [illegible] $ydz^2 = 0$ Ma tentando l'integrazione sentesi a così dire respinto alla formola cardanica di termini imaginarj implicata, da cui voleva fuggire e nella stessa formola ci attesta essere ricaduti il sommo geometra de la Grange, e l'accurat[issimo] Analista Malfatti da lui pregato ad accingersi alla medesima integraz.e onde [illegible] in diritto di stabilire la portentosa conseguenza Binomium Cardanicum in irreducibili valores esse necessario reales, formae autem necessario imaginariae. An[che] il Con. Radicati di Coconato nelle sue sottilissime Memorie analitiche stampate in Milano sin dall'anno 1764 cercando generalmente nel prob. 110 i rapporti ne[cessari] de' coefficienti dell'equaz.e (sostituisco z alla x da lui adoperata per conservare le denominaz.i superiori ed evitar la confusione) $z^2(a+bz^2)ddy + z(a+fz^2)dzdy + (g+$ [illegible] $)ydz^2 = 0$ di modo che essa abbia per integrale completo (I) $y = Mz^\lambda(\sqrt{a} + \sqrt{-b}$ [illegible] $) + N(\sqrt{a} - \sqrt{-b} \cdot z^{\frac{n}{2}})^{m} z^\lambda$ trova che l'equaz.e deve avere i coefficienti come segue $z^2(a+bz^2)ddy + z\left(a\left(e - 2\lambda - \frac{n}{2}\right) + b\left(\frac{n}{2} + 1 - 2\lambda - mn\right)z^2\right)dzdy + (a\lambda$ [illegible]

$+6(\mu+\pi.\frac{r}{n}]\ (\lambda+\pi.\frac{n}{n}-\frac{n}{n})\ z^n)\ ydz^n=0$ che supponendo $\lambda=\frac{a-\frac{an}{a}}{2a}-e,$ $x=q+\frac{be-af}{abn}$ mette sotto più semplice forma cioè $z^n(a-bz^n)ddy+z(e+fz^n)$ $dy+\left(\frac{(ba-e)^n}{4^2}-\frac{an^n}{4.4}+\left(\frac{b-f}{4b}n\right)-\frac{bn^n}{4.4}z^n\right)ydz^n=0$ l'integrale della quale pure in generale di termini imaginarj implicato sopra si vede. Date poi le determinazioni di $n=n$, $a=1$, $b=q$, $e=0$, $f=1n$, $\lambda=0$, $\pi=\frac{1}{3}$, $z=\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}$, $y=\frac{x}{n\sqrt[3]{\frac{1}{n}q}}$ la riduce all'equaz. particolare $z^n(1+qz^n)ddy+z.1nz^ndzdy-$ $ydz^n=0$ la quale divisa per z^n è chiaro essere la stessa già sopra esposta. Il Sig. Con. dice porger la somma della serie $y=1+z^n-\frac{5.8}{3.4}z^4+\frac{5.8.11.14}{3.4.5.6}z^6$ racchiude lo scioglimento del caso irreducibile inferendo tutto ciò dalla forma stessa l'integrale indeterminato (I) introducendo anche in esso le fatte determinaz. ed è la seguente $\frac{x}{n\sqrt[3]{\frac{1}{n}q}}=M\left(1+\sqrt{-q}.\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}\right)\frac{1}{3}+N\left(1-\sqrt{-q}.\right.$ $\left.\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}\right)\frac{1}{3}$. ossia compiute le opportune riduz. $x=nM\sqrt[3]{\frac{1}{n}q+\sqrt{-1}.\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}}$ $+nN\sqrt[3]{\frac{1}{n}q-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}}$ che è la formola (C) per il caso $\frac{1}{4}q^2<$ purchè si facciano le costanti indeterminate M, N ambedue $=\frac{1}{2}$. Il metodo Sig. Con. ben si vede esser converso ma 'l risultato è il medesimo del metodo di: Non devesi però da me tralasciare un'importantissima avvertenza che il Con. stesso subito dopo soggiunge esservi de' casi particolari nei quali l'integra: (I) può essere spogliato degli imaginarj e condotto ad espressione reale ad un produce di singolar rimanco per lui meritevole. Io non ho potuto però finora se la detta avvertenza applicar si possa al nostro proposito della formola della sua corrispondente differenziale equaz. nella quale si involge la somma serie (R). Dirò bensì dire che utili esperimentandosi altri metodi come del Nicola del con. Ab. Vincenzo suo fratello dell' Alembert per trovare espressioni reali a libere affatto da imaginarj i valori di x o della somma serie (R) per innumerevoli casi di $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$ appartenenti alla equaz. (B) (A') o di simil specie e che da niuno si negherà racchiudersi nella formola (C) ché accordar non si voglia ad essi e loro consimili da me denominati della 1.a classe il privilegio di essere anzi gli unici della natura inchiusi nella stessa formola ad esclusione degli altri di 3.a classe attinenti all' equaz. (A) ossia al caso detto irreducibile violentemente intrusivi per errore degli analisti. Mi sembrerebbe che il metodo poi del calcolo integrale il più eccellente che noi abbiamo e quasi e penetrante in ogni più cupo ricesso della natura non voglia a trar fuori loro nascondimento nel profondo seno dell' infinita espansione della serie (R) gli valori reali di x e rompere trionfantemente l'implicaz. imaginaria della

formola (C) e l'ostinato ricomparire che fà la somma generale di (R) sotto
imaginaria non sarebbe egli un effetto appunto della generalità di effetto
abbracciare tutti i casi di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ senza distinz.ne veruna di quelli della
1.a classe e di quelli della 3.a e confondendo così insieme i casi di vero reale va
della serie (R) e solo apparente implicaz.ne imaginaria della formola (C) con
opposti che assoluta intrinseca ripugnanza introducono nella serie e nella for
e la conseguenza da doversi tirare dallo stesso ostinato ricomparire della s
generale della serie (R) sotto forma imaginaria non sarebbe ella che il valor
della serie medesima e della formola (C) è per legge di natura necessariamente
alcuni casi limitato ad assolutamente inesplicabile agli altri ai quali volendo tal
contro legge di natura trasferirlo è necessario ricadere indispensabilmente
in formole non solo di aspetto ma di intima essenza necessariamente imaginari
Questa conseguenza è precedenza dalle mie dimostraz.ni e nulla hà di misterios
Allo incontro l'altra che il Binomio Cardanico nel caso detto volgarmente irr
=ducibile è di valore necessariamente reale [illegible]
e di forma necessariamente imaginaria quanto non è arcano misterioso e
di paradosso. E l'amore della verità non mi acconsentì di tacere che p
dedurla con qualche diritto bisognava dimostrare primieramente ciò che n
per cosa certa contro le scoperte del Kaenig dall'autore non ignorate ch
formola cardanica appartenga al caso irreducibile, secondariamente che
erano esauriti tutti i metodi da potersi tentare per rinvenire sotto re
espressione la somma della serie (R) terzo che il ricomparire sotto form
imaginaria è necessità di naturale costituz.ne per tutti i casi non di ess
relaz.ne a casi estranei introdottivi col concetto della mente e che prossim
anche usate destre modificaz.ni particolari. Ma io penso che tali modificaz
=perando si debba anche col calcolo integrale e meglio e più universalmente
che con altri metodi giungere a ritrovare sotto espressione reale la som
della serie (R) per tutti i casi ai quali essa appartiene veracemente che
sono giusta le mie dimostraz.ni i soli della 1.a e 2.a classe. Questo tentativo sa
il soggetto de' miei futuri studi nei quali non poco mi animerà la sorte d
Giudice tanto saggio e tanto umano ad un tempo quanto è V. S. a cui
presentarne mi è concesso amichevolmente il risultato come ora presen
e sottometto queste osservazioni

[illegible] Sig.r [illegible] e Pron Col.mo   299

[illegible] difficoltà mossa dal Sig.r Cassiani contro il metodo Riccatiano di costruire le radici [illegible] delle equazioni, la di cui formola generale è $x^p - pax^{p-2}\,\&c. - b = 0$, mi ha condotto a [illegible] osservazione importante la quale credo bene communicare a V. S. Ill.ma per intendere il suo [illegible] giudizio. L'acutissimo autore considera l'ipotesi di a negativa, e di p numero pari, [illegible] nel caso di $a^p > \frac{b^2}{4}$ trova $\frac{x}{2} = \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}}$. Per ridurre questa formo[la] [illegible] all'espressione dell'arco circolare submultiplo la moltiplica per $\sqrt{-1}$, onde si ha [illegible] $\frac{x\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{-1}\left(\sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}}\right)$, e poi alzando $\sqrt{-1}$ alla potestà di p nel secon[do] membro ottiene $\frac{x\sqrt{-1}}{2} = \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}}$, ove $\frac{b}{2}$ ha il segno +, o −, secon[do] che b è quantità positiva, o negativa, e $\frac{p}{2}$ numero parimente pari, o impariter pari.

[illegible] è dove il Sig. Cassiani accusa la teoria di errore, perchè, dic'egli, le radici dell'Equazione [illegible] sono veramente imaginarie, e l'autore le ha prese come reali, ed ha alzato $\sqrt{-1}$ [al]la potestà di p nel secondo membro, il che secondo lui non par lecito. Ma io rispondo, che l'[au]tore ha benissimo riconosciute le radici x come imaginarie prima di ridurle all'espressio[ne] [de]ll'arco submultiplo. Infatti perchè fa egli quella moltiplicazione riducendo poscia [$\sqrt{-1}$] sotto il segno radicale $\sqrt[p]{}$ nel secondo membro? certamente perchè volendo egli por[re] $\sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} = \sqrt[p]{Co.\varphi + \sqrt{-1}\,Se.\varphi} - \sqrt[p]{Co.\varphi - \sqrt{-1}\,Se.\varphi}$ senza una tale operazio[ne] [la] x viene ad essere $= Se.\varphi\sqrt{-1}$ quantità imaginaria. Ha egli dunque dovuto necessariamente riconoscere come imaginarie le radici x prima di quella operazione. Quindi ha inteso di

298 formola (C). Ed il ripetere vi comparisce che fa la somma generale di (R) viene immaginaria non, sarebbe egli in effetto apparato della generalità in effetto abbracciava tutti i casi di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ senza distinz. veruna di quelli della

300

di convertirle, e trasformarle in reali, e poi costruirle secondo il suo metodo. L'artifizio da lui usato è certamente fondato sopra i principii indubitati dell'Algoritmo. Contuttociò osservo, che le radici così trasformate non sono più radici dell'equazione $x^p + pax^{p-2} \ldots q$ [illegible] ma dell'altra $x^p - pax^{p-2} \ldots - b = 0$, posta a positiva. Perocchè sia per esempio $p = 2$. sarà $x = \sqrt[2]{\frac{\pm b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[2]{\frac{\pm b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}$ e quadrando $-x^2 = -2a \pm b$ cioè $x^2 - 2a \pm b = 0$. [illegible] ricavasi dunque dalla teoria medesima dell'autore. Si è posta $x = m + n$, indi $m = \sqrt[p]{\frac{\pm b}{2} + \ldots}$ $n = -\sqrt[p]{\frac{\pm b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}$ scegliendo quel radicale, il di cui prodotto $= -a$, perchè mn dovea nell'ipotesi $= -a$. Ma poichè $x\sqrt{-1} = m\sqrt{-1} + n\sqrt{-1}$, rimanendo invariati i due radicali sarà $-mn = -a$, cioè $mn = a$: dunque volendosi trasformare le x immaginarie in reali si viene a cangiare la a negativa in positiva contro l'ipotesi stabilita. Se l'autore ha sbagliato, il che non ardisco di affermare, lo sbaglio consiste nel non aver posto mente al cangiamento, che necessariamente consegue dalla suddetta trasformazione. Quindi conchiudo che l'operazione da lui eseguita è giustissima in quanto che rimane salva l'uguaglianza, ma non è opportuna, perchè distrugge l'ipotesi. Supplico V.S. Ill.ma di qualche lume in questo particolare, perch'io desidero non solamente di riconoscer l'errore, ove sia possibile, ma di liberare da ogni minima macchia questa bellissima teoria che fa tanto onore al nome Riccati. S'ella mi vorrà onorare della risposta la prego ad indirizzarla a [illegible] per Correggio, ove quanto prima vado a trattenermi per qualche mese, e [illegible] sono sempre

Di V.S. Ill.ma

Modena 3: [illegible] 1779

Um.mo Dev.mo Servitore
Giuseppe Contarelli

Ill.mo Sig.r Conte Sig.r e Prone Col.mo

2 9 5 formola (C). Ed l'opinato vicomparire che fu la somma generale di (R) reale imaginaria non sarebbe egli un effetto apparente della generalità un effetto abbracciando tutti i casi di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ senza distinz. veruna di quelli della

All'Ill.mo Sig. Sig. Col.mo
Il Sig. Conte Giovanni Belliati
Venezia per Treviso

Ill.mo Sig. Conte Sig. e Pron. Col.mo 301

...ant' è. Il povero Ab. Zorzi, che con una complessione debolissima ha voluto sforzar troppo le carte, e studiare dì e notte con una reprensibile intemperanza, ha dovuto cedere alle replicate scosse e morire affogato nel suo sangue. Io ho perduto in esso un de' più cari amici che m'avessi al Mondo, e sono ancora inconsolabile per una perdita sì luttuosa. Ma di quanto danno è mai stata questa morte alle lettere e all'Italia, che tutto poteva sperare da sì grande e sublime ingegno? Non ne parliam più, perchè troppo m'accora il pensarvi, ed io ho bisogno di distrazione.

La dissertazione di V.S. Ill.ma non corre alcun pericolo, anzi tra 3 o 4 settimane io spero di farle tenere siccome ad Autore 12 copie del Prodromo, che è già stampato. Ho già avvisato lo Stampatore Giuseppe Pazzini di Siena, che nell'involto di esemplari vendibili che manderà a Venezia ve ne inserisca uno a parte a Lei diretto, pregando il Librajo suo Corrispondente di trasmetterglielo tosto a Treviso. Non mi sarebbe mai uscita di mente la sua dottissima dissertazione, e al caso che non si fosse proseguita la stampa, io l'avrei già ricuperata, e restituita al suo Autore. Ella dunque viva quieta: si assicuri che i Riccati mi sono sempre presenti alla memoria; ed onorandomi de' suoi pregiatissimi comandi mi creda quale con rispettoso ossequio mi raffermo

Ferrara il pr.o decembre 1779

Di V.S. Ill.ma

Dev.mo Obbl.mo Servitor Vero
G. Franc.o de Malfatti

piccanda; —
mano venir a Venezia, gli lascio sino ad un tal tempo
in mano il M.S., ed anche per più lungo spazio,
secondochè

29 302

paccenda,
mano venir a Venezia, gli lascio sino ad un tal tempo ovec,
in mano il M.S., ed anche per più lungo spazio,

secondochè

29

All'Ill.mo Sig. Sig.r Pron Col.mo
Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 303

Mentre io sperava, che quanto prima si dasse princi=
pio alla stampa della mia Opera sopra le Leggi del
Contrappunto, il Molini scrive al Sig.r Prof. Toaldo,
che ad onta di tutte le premure praticate, non gli
è riuscito di indurre alcuno ad intraprendarne l'
edizione. Soggiunge poi, che se vi fosse chi volesse
interessarsi per la metà ~~dell'edizione~~, gli
riuscirebbe facilmente di indurre uno Stampatore
di costì ad intraprenderla; ma non indica la somma
della spesa, che importerebbe ~~l'edizione~~. Se questa
fosse nota, si potrebbe vedere, se fosse possibile trovar
forse o per associati, o per altro mezzo la metà indicata.
In queste poco favorevoli circostanze mi rivolgo a
V.S. Ill.ma supplicandola ad informarsi, se vi fosse
mezzo, che questo affare andasse a buon termine.
Promette il Molini, che dandogli un poco di tempo
tratterà con altri e di costì, e d'altronde. Gioverà
moltissimo, ch'Ella si degni di proteggere questa
faccenda, e dovendo il Molini da qui a cinque setti=
mane venir a Venezia, gli lascio sino ad un tal tempo
in mano il M.S., ed anche per più lungo spazio,

secondochè

secondochè da Lei mi verrà prescritto. Se questa edizione non si fa finchè io vivo, le mie fatiche sono gittate. Mi raccomando dunque a V.S. Ill.ma, e confidato nella sua somma benignità, passo a dichiararmi con pienissima stima e rispetto

Di V.S. Ill.ma

Treviso 3 9bre 1779

Ill.mo Sig. Ab. Leonardo Ximenes
Firenze

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r mio e Pron. Col.mo

ve serva
questure.
raro già
ii dra
cessario
il princ
mma
uomo
serva
altro
ril cap
il lap.
LAD
preten=
mi.. è
mini=
onte.

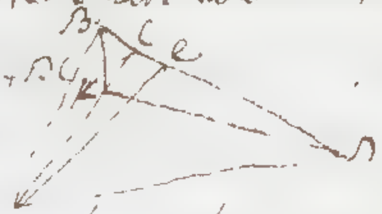
... trop. ... sovra ...

Ill.mo Sig.r e Pron. Stimat.mo

...mo la sua gentilissima lettera de' 20 di Agosto la quale ho ricevuta assai tardi ... la cosa, e ciò per mia trascuraggine, per non averla ... fatta levare a tempo opportuno. ... la ringrazio ... e conservare la sua preziosa salute per ... de' bagni di Recoaro, giacchè le riescono profittevoli.

...sioni di ... sono degne di un eccellente geometra quale ... ammettono eccezione. Egli è verissimo, che per avere il minimo assoluto, egli è necessario che la somma si mantenga sempre costante ... alcune posizioni ... facendo muovere il punto C ... in un sito infinitamente prossimo, io ... indubitabile, che la somma

AK + BK + DK è minore dell'altra AC + BC + DC



. Ciò nonpertanto ella mi accorderà, che la somma

BC + AC + DC è un minimo relativo a qualunque altra somma, che si prenda in un punto del lato BD ... dal punto C. In questo senso, e non in altro ... io credo, che il caso da me ... considerato, e che comprende ... casi considerati analiticamente, ci somministra un minimo. Date le posizioni il lato BD del triangolo ABD, o qualunque altra retta tirata dal punto B alla base AD in essa avremo mai sempre un minimo relativo a tutte le somme, che ponno prendersi nell'ipotesi, che il punto del comune concorso debba esistere in quella retta. Se una tal condizione si aggiunge al problema, non è più permesso il cercare la mini=

Valdobbiadene 4 7bre 1779.

Um.o Dev.mo Obb.mo Ser.
Antonio Pellizzari

me comme fuori di quella volta. Frattanto aspetto con sommo desiderio le dotte aggiunte che ella mi promesse di fare alla dottrina esposta nell'ultima sua, le quali m'illumineranno viemaggiormente.

A quanto le scrissi nell'ultima mia sotto [illegible] un'aggiunta [illegible]. Resta una via di [illegible] la teoria, e l'autore sol dire, che $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}}$ è radice risultante del quadrato $\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}} - 2a + \frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$, ma del quadrato, cioè $-1\cdot\left(\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}} - 2a + \frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}\right)$ ... [illegible] il prodotto mn $= mn = -a\sqrt{-1}^2 = \pm a$. Ma non so poi come questo s'accordi colla ordinaria di risolvere l'equazioni quadratiche. Sia per esempio $p = 4$, l'equazione $x^4+4ax^2+2a^2-b=0$ e però $x = \pm\sqrt{-2a\pm\sqrt{2a^2+b}}$, $x\sqrt{-1} = \pm\sqrt{2a\mp\sqrt{2a^2+b}}$, [illegible] conseguenza $x\sqrt{-1}$ quantità reale. Questo è un nodo, ch'io no so come sviluppare. [illegible] sempre

Di V. Ill.ma

Modena 3 settembre 1771

Umil.mo e Dev.mo Servitore
Giuseppe Lotarelli

ore,

Valdobbiadene 4. 7bre. 1779.

Umo. Devmo. Obbmo. Ser.
Antonio Pellizzari

8 51

All'Ill.mo Sig. Sig. Pron. Col.mo

Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia per Trevigi

Sig. D. Antonio Rivmo

307

Nobile Sig.r Co.

Per aver voluto aspettare la presente occasione, ho differito più del dovere a ringraziarla della nuova dimostrazione del suo compatimento, che mi diede, favorendomi del libretto contenente le lettere sopra il secondo ramo della Logistica. Ho creduto d'essere obbligato a Lei, e al chiarissimo suo fratello, fin da quando venne fatto a mio Ilto. questo onore, ma ora più, che si fece pubblico. Oltre di che ho io infinite particolari ragioni, che me le rendono tenuto sommamente. In aggiunta a tante obbligazioni mi resta solo a desiderare, ch'Ella, Nob. Sig.r Co., mi procuri qualche incontro di poterla servire, se mai potessi essere abile in qualche cosa; perchè soffro mal volentieri d'aver non altro che l'animo, e la disposizione di un suo

Nob. Sig.r Co.

Valdobbiadene 4. 7bre. 1779.

Umo. Devmo. Obbmo. Ser.
Antonio Pellizzari

Sig. D. Antonio Rivino

D. Piet. Maria [illegible]

molto piacere, che le Lettere sopra i logaritmi dei
numeri negativi abbiano incontrato il suo aggra=
dimento. Oltrechè le stesse sono inserite nel T. XVI.
del Giornale di Modena, il Sig. Ab. Tiraboschi ne
ha fatto tirare molte copie a parte, delle quali me
ne ha spedito dodici, ed io ne ho fatto parte a quei
Valentuomini, che di tali studj dilettansi. Il Sig. D.
Giacomo suo fratello mi ha favorito dei suoi Opuscoli
attenenti all'Educazione, che ora sto leggendo con
sommo diletto. È giustissima l'idea, che i Giova=
netti si debbano istruire col mezzo dei casi particolari,
degli esempj, e dell'imitazione. Sembra, che presen=
temente sia disposto ad impiegarsi di nuovo nello
studio. Io non cesserò certamente di stimolarlo;
imperciocchè mi spiacerebbe, che la Società dovesse pri=
varsi i frutti di un talento sì raro. Resto con pro=
testarmi

Di Lei Sig. D. Antonio Rivmo

Treviso 12 9bre 1779.

Molto Rendo Sig. D. Antonio
Pellizzari. Valdobbiadene.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

applaceno ...
clemenze in favore della detta edizione.
Vedrò dunque allora se in Lei conclusione.

... nella sorna.

[illegible]
Clemente in favore della detta edizione.
Vedo dunque allora se in Sua conclusione.

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 315

Ill.mo Sig.r Sig.r Broncoli 371

Il compimento de i fogli di V.S. Ill.ma mi trova
va in questo Appennino di Pistoia, per dar compi:
mento alla Visita Pastorale, e nel tempo stesso all'
ultimo Ponte della medesima. Perciò provo
dispiacere di non poter subito servirla nell'
affare della sua stampa, per la quale piglio
tutto l'interesse, desiderando ancor io di vedersi
fare questa edizione colla revisione del glo:
rioso Autore.

Sulla fine di questo mese mi occorre far
un viaggio per visitare il Luogo di [illegible], e forma:
re una relazione per la navigazione del med.o
Non posso restituirmi a Pistoia, se non che verso
la fine del mese d'Ottobre, e mi conviene con mio
dispiacere il differire sino a quel tempo le mie
premure in favore della detta edizione.

Vedrò dunque allora se vi sia conclusione

a Firenze, ed in qual maniera, e con quale spesa. E quando mai l'uno non riuscisse, spererei di potermi riuscire nella Città di Siena, nella quale nuovamente sono stato richiesto più stampare.

Intanto in quest'intervallo di tempo facci il piacere di scrivere al Muleni, che se l'intenda da mezzo, e mi comunichi il suo piano, e le sue difficoltà, affinchè al mio ritorno io possa subito incominciare il trattato col medesimo, e collo stampatore, che ha fatto l'offerta al Muleni.

Si è cominciato a stampare in Parigi fino dal principio dell'anno corrente una bellissima Gazzetta Letteraria intitolata *Novelle della Repubblica delle Arti, e delle Scienze*. Essa ha l'approvazione dell'Accademia Reale. Si stampa ogni

Illmo Sig.re Sig.re Prone Colmo 315

313

Settimana. La sua direzione è addossata a Mons. de la Blanderie, il quale forma una corrispondenza generale di Letteratura, e desidera le nuove Letterarie dell'Italia p inserirle nelle stesse Novelle. Costa ventiquattro lire di Francia a Parigi, e lire trenta alle frontiere. Se ella volesse soscriversi, basterà far capo allo stesso Mulini. Se avesse delle nuove Scientifiche, o Letterarie ne le comunichi, che mi sarà facile il farle pervenire al Direttore Mons. de la Blanderie.

Mi comandi ovunque io potessi obbidirla, mentre colla più sincera stima, ed amicizia mi dico

Di V.S. Illma

Montagna di Pistoja 18: 7bre 1779

Devotiss. ed Obb.mo
Leonardo Ximenes

All'Illmo Sig. Conte
Giordano Riccati
Treviso

D. Pier. Maria Soltini

...ll'esibitore della presente, ch'è il Sig. Ab. Luigi Jacotto verrà consegnato a V. S. Ill.ma un involtino con due Dissertazioni, ch'io offerisco a cotesto applaudito Giornale. La prima è del fu Co. Jacopo mio Padre, e non essendo stata inserita nel corpo delle sue Opere, penso che sarà ricevuta con aggradimento, perchè riduce in qualche modo piano il problema della trisezione degli angoli. Egli è curioso il giro di raziocinio, che usa l'Autore, insegnando prima a descrivere una serie di triangoli, nei quali si ottiene di trinarire l'angolo opposto alla base con una formola del secondo grado, e determinando poscia la misura del detto angolo, che specialmente nei triangoli della seconda specie può ricevere tutti i valori.

La seconda Dissertazione io tratto della Figura, e dello Spaccamento degli Archi. Io l'ho spedita molti anni fa a Pisa, acciocchè fosse stampata in quella Raccolta, ma non essendo mai comparsa in pubblico, spero che avrà miglior sorte presso cotesti Signori Giornalisti, che hanno sempre con occhio di benignità riguardate le cose mie. Contien essa parecchie verità, che possono riuscire utilissime alla pratica.

Il

		[illegible] / $4al$	= [illegible] / $4al$
pag.	4.	$-\frac{(1-g^2)Mc}{3rab}$	$\frac{(-1-g^2)Mc}{3rab}$
pag.	6.	$(14+16r^2).bc^2$	$(14+16rg^2).bc^2$
pag.	1.	$\frac{LMc^2}{4Pb^2}$	$= \frac{LMc^2}{4Pb^2}$

D. Pier-Maria Sotina

Il Sig. Ab. Van Antgarden ha compiuta la Traduzione dei Principj, e dei Metodi della Meccanica dell' Ab. Vincenzo mio Fratello. La serbo così, perchè se mai costì si risolvesse di imprimere l'intera Raccolta delle sue Opere, si potrebbe unire anche questa.

Le due mie Lettere contenute nel Tomo XVII. del Giornale sono talmente piene di astrusi calcoli, che non v'è maraviglia, che all' attento, ed intelligente Correttore siano sfuggiti alcuni errori, dei quali rinchiudo la nota colle loro correzioni, acciocchè mi favorisca di pubblicarla nel Giornale XVIII.

La supplico dei miei complimenti allo stimatissimo Sig. Ab. Tiraboschi, ed esibendomi ai pregiatissimi suoi comandi, con pienissima stima e rispetto mi sottoscrivo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 19. 9bre 1779

Ill.mo Sig. Ab. Domenico Troili
Modena

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

		$\frac{\ldots}{4ab}$	$= \frac{\ldots}{4ab}$
279.	4.	$-\frac{(1-g^2)Mc}{3nab}$	$\frac{(-1-g^2)Mc}{3nab}$
280.	6.	$(14+16n^2).bc^2$	$(14+16ng^2).bc^2$
280.	1.	$\frac{LMc^2}{4Pb^2}$	$= \frac{LMc^2}{4Pb^2}$

D. Pier Maria Sottini:

Molto Revdo Pre Sigre Sigre Pron Colmo 319

317

Errori corsi nella Lettera III. e IV. del Sig. Co. Giordano Riccati al Sig. Co. Girolamo Zanotti.

Tom. XVII.

Pag.	Lin.	Errori	Correzione.
234.	3	$\frac{1}{2}\frac{ddx\sqrt{2}}{L}$	$\frac{1}{2}\frac{bdx\sqrt{2}}{L}$
239	9.	$\frac{b}{4Lc^2}\cdot 2\int\left(\left(\cos.\frac{2bx}{L}\right)^9\frac{2bdx}{L}\right)$	$\frac{b}{4Lc^2}\cdot 2\int\left(\left(\cos.\frac{2bx}{L}\right)^2\frac{2bdx}{L}\right)$
242	7.	$\frac{\frac{1}{2}\left(\text{Sen.}\frac{2bx}{L}-\frac{1}{2}\frac{bx\sqrt{2}}{L}\right)^2}{2a}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\text{Sen.}\frac{2bx}{L}-\frac{1}{2}\frac{bx\sqrt{2}}{L}\right)^2}{2a}$
243	2.	$\frac{2Mb^2x^2dx}{4aL^2}$	$\frac{2Mb^2x^2dx}{4aL^3}$
251	3.	$(1+3g^2)$	$(1+3g)^2$
252.	4	$-(24g-72g)^2$	$(-24g-72g^2)$
254.	10	$\frac{c}{4}\int\left(\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\right)^3\cos.\frac{2bx}{L}$	$\frac{c}{4}\left(\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\right)^3\cos.\frac{2bx}{L}$
256.	4.	$\int\left[\left(\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\right)^4\left(\cos.\frac{2bx}{L}\right)\right]^2\cdot\frac{2bdx}{L}$	$\int\left[\left(\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\right)^4\left(\cos.\frac{2bx}{L}\right)^2\right]\cdot\frac{2bdx}{L}$
257.	6.	$\frac{24g^6b}{Lc^5}$	$\frac{24g^2b}{Lc^5}$
264.	11.	$\frac{6g^2b}{Lc^2}$	$\frac{6g^2b}{Lc^5}$
265.	3.	$-\frac{(3g-12g^2)}{2Lc^2}$	$\frac{(-3g-12g^3)}{2Lc^2}$
265.	6.	$\sqrt{\left(\frac{1+9g}{2}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{1+9g^2}{2}\right)}$
268.	12.	$-\frac{(g-3g^2)M}{2abc^2}$	$\frac{(-g-3g^2)M}{2abc^2}$
270	10		
270.	11.	$-\frac{(3g-9g^2)Mc^2x}{4aL}$	$\frac{(-3g-9g^2)Mc^2x}{4aL}$
274	2.	$\frac{\sqrt{\left(\frac{1+9g^2}{2}\right)(1+3g}}{4aL}$	$=\frac{\sqrt{\left(\frac{1+9g^2}{2}\right)(1+3g)}}{4aL}$
279.	4	$-\frac{(1-g^2)Mc}{32ab}$	$\frac{(-1-g^2)Mc}{32ab}$
282.	6.	$(14+162^2).bc^2$	$(14+162g^2).bc^2$
282.	1.	$\frac{LMc^2}{4pb^2}$	$=\frac{LMc^2}{4pb^2}$

D. Pier-maria Sotina

Pag.	Lin.	Errori	Correzioni
294. 295.	7.) 3.)	$-\left(\frac{3g-12g^2}{2dc^3}\right)b$	$\left(\frac{-3g-12g^2}{2dc^3}\right)b$
295.	9	$-\left(\frac{1+7g}{2d}\right)bc$	$\left(\frac{-1+7g}{2d}\right)bc$
297.	5.	$-\frac{(g-3g^2)M}{2abc^2}$	$\frac{(-g-3g^2)M}{2abc^2}$
297.	7.	$\frac{(1+3g)M}{4{\sim}ad}$	$\frac{(1+3g)M}{4ad}$
298.	3	$-\frac{(1-g^2)Mc}{3\cdot 2ab}$	$\frac{(-1-g^2)Mc}{3\cdot 2ab}$
300.	9.	$+117g^2b^3$	$+117g^2bc^2$

Molto Rev.do P.re Sig.re Sig.re P.rone Col.mo 319

[im]piegato a rivedere due Dissertazioni, che avea da spedire a Modena, non ho potuto prima d'ora considerare posatamente la pregiatissima lettera di V. R. dei 22. Agosto. Quando sotto il titolo di caso irreducibile si comprendano soltanto quelle equazioni, in cui $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, ed oltre a ciò le tre radici sono irrazionali; gli esempj da me recati non appartengono al detto caso. In fatti avendo io provato nella mia dei 13. Agosto, che volendosi q quantità razionale, dee verificarsi o che $\sqrt{\frac{p}{3}}$: $\sqrt{1+n^2}$ si riferisca in proporzione razionale, o che $\frac{p}{3}$, $1+n^2$ siano numeri quadrati; ne segue necessariamente, che la radice $x = n\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1+n^2}}}$ sia razionale.

[L']esame del metodo assai composto del Sig. Nicola richiederebbe un lungo studio. Io frattanto rifletto, che l'aggiustatezza del metodo stesso, il quale nell'equazione $x^3 - px + \frac{p}{\sqrt3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = 0$ determina $x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = 0$, agevolmente si prova. Imperciocchè la formola Cardanica prende il seguente aspetto

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} = 0,$$

ed avendo il P. D. Vincenzo mio fratello dimostrato

$$\sqrt[3]{\frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{\frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot3}\sqrt{\frac{2p}{3}}}\sqrt{-1},$$ ne segue

... affermativo, o neg...

adatta il segno affermativo, o negativo

o è numero pariter pari, o impariter pari.

Non comprendo la ragione, per cui l'acutissimo Sig. Avvocato Cassiani neghi potersi nel secondo membro alzava

...

D. Pier. maria Solinà.

ne segue per conseguenza $x - 2\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt[3]{\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}}$
31 $= x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = 0$, come appunto ha scoperto l'Autore
Pag. Francese con metodo giusto; perchè al vero conduce.
293 Secondo quello che io penso, la vera idea del caso
29 irreducibile dipende da ciò, che sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$,
29 e che non si possano estrarre le
293 $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$. Se si espungono
29 gono le dette radici, nella loro somma svanisce
29 la quantità immaginaria, e quindi il valore di
x trovandosi reale, il caso non è irreducibile.
300 Si avvera ciò nelle due formole del Sig. Nicola,
e di mio Fratello, e si dee parimente avverare
in quella del Sig. Colonnello Lorgna, la cui Memoria
non è ancora stampata, e credo che comparirà in pubblico nel Tomo VI. dei Comentarj
dell'Accademia di Bologna, che da tanto tempo
si aspetta.

Fra le quantità reali alcune si possono dinotare coi
numeri, e queste sono razionali. Altre in numeri
non sono esprimibili, e queste sono irrazionali o
assimmetre. Altre finalmente vestono l'ingannevole
figura di immaginarie, e queste sono trascendenti,
o relative alle trascendenti. Gli archi di cerchio
sono quantità reali, ma trascendenti, e quindi
addiviene

addiviene, che posto il raggio $= r$, l'arco di cerchio $= \varphi$, la sua tangente $= z$ sia l'arco suddetto $\varphi = \frac{r}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{r+z\sqrt{-1}}{r-z\sqrt{-1}}\right)$, e venga espresso da una grandezza reale, ma sotto forma immaginaria. Sotto un simile aspetto compariscono i coseni degli archi submultipli, a per esempio suttripli (giacchè si tratta di equazioni del terzo grado) avverandosi la nota formula

$$2\,Cc.\frac{\varphi}{3} = \frac{\left(Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi\right)^{\frac{1}{3}} + \left(Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi\right)^{\frac{1}{3}}}{r^{-\frac{2}{3}}},$$

nella quale $Cc.\frac{\varphi}{3}$ benchè reale ha la sembianza di immaginario, di cui generalmente non può spogliarsi. Nella mia prima Lettera col mezzo di questa formola ho data la costruzione della formola Cardanica $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2}\sqrt{-1}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2}\sqrt{-1}\right)}$ ponendo $x = 2\,Cc.\frac{\varphi}{3}$, $r = \sqrt{\frac{1}{3}p}$, $\frac{1}{2}q = r^2 Cc.\varphi$, ed ho determinati i tre valori reali di x. Nei casi delle quantità irrazionali, o in apparenza immaginarie la Geometria supplisce alli Analisi. [...]lla formola di mio fratello se p, q sono razionali, ne risulta anche tale la radice Cardanica x; e se questa radice è irrazionale, diviene tale anche q. Quindi posto p, q reali, le tre radici non possono essere semplicemente irrazionali, ma peggiono appartenere a quel genere di grandezze reali.

[...] affermativo [...] adatta il segno [...]
[...] è numero pari per pari, o impari per pari.
[...]on comprendo la ragione, per cui l'acutissimo Sig. Avvocato Cassiani negli potersi nel secondo membro [...] altera

D. Pier-maria Cossali.

reali, che appariscono immaginarie, e che sol
31 spettano al caso irreducibile. Io dunque aderi
Pag alla conclusione del Sig. Lorgna e *Bononien*
293 *Cardanicum*, *in casu vulgo irreductibili*, valor
29 *esse necessario realis*, *formam autem necessari*
29 *imaginariam*.

293 Io sottometto quanto ho scritto al purgatissimo
29 giudicio di V.R. e pregandola di ricordarmi
servitore al Sig. Lodovico Venezze, mi rassegno
29 con indelebile stima ed ossequio

300

Di V. R.

Treviso 24. 9bre 1779.

Molto Rndo P. D. Pietro Cossali Teatino Padova

Umil.mo Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

3 n 3

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

3 n 3

difesa ch'ella fa del metodo di mio Fratello è giusissima. E primieramente le radici delle equazioni

$x = \sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}}$ sono tutte immaginarie, quando p è numero pari, ed $a^p > \frac{b^2}{4}$. Mi serva d'esempio la formola, da cui nasce la sovrascritta posto $p = 4$, $x^4 + 4a\,x^2 = b - 2a^2$, le cui quattro radici $x = \pm\sqrt{-2a \pm \sqrt{b + 2a^2}}$. Poichè $a^4 > \frac{b^2}{4}$, sarà $2a^2 > b$, e quindi $b = \frac{2a^2}{n}$, dinotando n un numero maggiore dell'unità. Avremo dunque $x = \pm\sqrt{-2a \pm \sqrt{\frac{2a^2}{n} + 2a^2}}$; ma $\frac{2a^2}{n} + 2a^2 < 4a^2$; dunque $\pm\sqrt{\frac{2a^2}{n} + 2a^2} < \pm 2a$, e per conseguenza $-2a \pm \sqrt{\frac{2a^2}{n} + 2a^2}$ quantità negativa, e $\pm\sqrt{-2a \pm \sqrt{\frac{2a^2}{n} + 2a^2}} = \pm\sqrt{-2a \pm \sqrt{b + 2a^2}}$ grandezza immaginaria.

Perchè diversa l'equazione come fa l'Autore per 2, multiplicandola per $\sqrt{-1}$, si cangerà in reale e potrà paragonarsi colla formola delle arco arco submultiplo. Avremo pertanto

$\frac{x\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt{-1}\sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}}}{2}$,

ed alzando $\sqrt{-1}$ alla potestà p

$\frac{x\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[p]{\pm\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{b^2}{4}}}}{2}$. A $\frac{b}{2}$ si darà il segno affermativo, o negativo, secondochè p è numero pariter pari, o impariter pari.

Non comprendo la ragione, per cui l'acutissimo Sig. Avvocato Cassiani neghi potersi nel secondo membro alzare

D. Pier. maria Solinà.

322

3, 324

Pag

29

29

29 ...alzare facilmente $\sqrt{-1}$ alla potestà 2. Tornando all'

29 addotto esempio $x^4+4ax^2=b-2a^2$, in riguardo a cui

29 si è trovato $x=\pm\sqrt{-2a\pm\sqrt{b+2a^2}}$. Moltiplicando

per $\sqrt{-1}$ ne risulta $x\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{-2a\pm\sqrt{b+2a^2}}$, ed al-

29 zando $\sqrt{-1}$ alla seconda potestà, $x\sqrt{-1}=\pm\sqrt{+2a\mp\sqrt{b+2a^2}}$,

equazione ugualmente giusta. E vaglia il vero

30 essendo $x^2=-2a\pm\sqrt{b+2a^2}$, sarà parimente

$-x^2=2a\mp\sqrt{b+2a^2}$, ed indi $x\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2a\mp\sqrt{b+2a^2}}$

come sopra.

Il metodo dell'Ab. Vincenzo ci guida a trovare

i valori di $x\sqrt{-1}$, i quali stanno a quelli di x

come $\sqrt{-1}:1$. Per la qual cosa sarà $x=\frac{\pm\sqrt{2a\mp\sqrt{b...}}}{\sqrt{-1}}$

ma $\pm\sqrt{2a\mp\sqrt{b+2a^2}}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{-2a\pm\sqrt{b+2a^2}}$; dunque

$x=\pm\sqrt{-2a\pm\sqrt{b+2a^2}}$ egualmente esige la proposta

equazione $x^4+4ax^2=b-2a^2$, nella quale mio fratello

non fa alcuna mutazione.

Credo che quanto ho scritto sciolga bastantemente

le difficoltà proposte nelle sue dottissime lettere

dei 31. Agosto, e dei 3. Settembre. Intanto Ella

si goda il soggiorno di Correggio, si diverta,

onde prender maggior vigore per la virtuosa

continuazion dei suoi studj, e mi creda quale

ho l'onore di confermarmi Di V.S. Illma

Treviso 25. 7bre 1779.

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Cantarelli: Umilmo Divotmo Servitore

Correggio. Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

D. Pier maria Rolina.

31
Pag
29
29
29
29
29
29
30

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo

[illegible] le due lettere gentilissime di V.S. Ill.ma, l'una [illegible], l'altra [illegible] di [illegible]. Quanto alla prima la dottrina ivi contenuta mi stabilì [illegible] risposta. Quanto alla seconda [illegible] che m'interessano. Primieramente da riflesso le due equazioni $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, $x\sqrt{-1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, sarà $x = x\sqrt{-1}$, cioè $1=\sqrt{-1}$, il che è assurdo. In secondo luogo prendo l'equazione $x^4 \pm 4ax + 2a^2 - b = 0$ [illegible] e trovo $x = \pm\sqrt{2a \pm \sqrt{b+2a^2}}$, $x\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-2a \mp \sqrt{b+2a^2}}$. Osservo poi che $\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ è radice del quadrato $2a \pm \sqrt{b+2a^2}$, giacchè $\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} = \sqrt{\pm\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}} + \sqrt{\pm\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}$, e perciò [illegible]

$\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} = \sqrt{\pm\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}} - \sqrt{\pm\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}$ è radice del quadrato $-2a \pm \sqrt{2a^2+b}$: dunque $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, $x\sqrt{-1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$; quindi due equazioni s'accordano perfettamente colle due prime, e quindi conchiudo, che $x^4 - 4ax + 2a^2 - b = 0$ si costruisce col mezzo non già de' conici, ma de' soli circolari, giacchè x è sempre reale.

Nell'equazione $x^4 + 4ax + 2a^2 - b = 0$, e trovo $x = \pm\sqrt{-2a \pm \sqrt{2a^2+b}}$, $x\sqrt{-1} = \pm\sqrt{2a \mp \sqrt{2a^2+b}}$; ma $\sqrt{-2a \pm \sqrt{2a^2+b}} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, $\sqrt{2a \mp \sqrt{2a^2+b}} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$; dunque $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$; $x\sqrt{-1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$. Questo ultimo valore si trova ancora moltiplicando l'equazione $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ per $\sqrt{-1}$, perciocchè $\sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ è radice del suo quadrato $= 2a \pm \sqrt{2a^2+b}$. Conchiudo, che

[illegible] quale mi protesto

Di Lei Sig.r Col.mo Padrone Riv.mo

Padova. 20. Ottobre. 1779.

Umil.mo Dev.mo Obbl.mo Servid.re
D. Pier-maria Cosini.

Il libro importa £ 6 ch'Ella con suo comodo farà avere a mio Fratello.

$x\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ [illegible]

Ma se è così, come dunque può essere $\sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$? Ha forse qualche valore espressione [illegible] quantità immaginarie [illegible] ciò non posso [illegible] persuadermi.

[illegible] d'onde deriva che l'equazione $x\sqrt{-1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ deriva dall'altra $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$ [illegible] dunque la soluzione per darla [illegible] di un'equazione diversa, qual è $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$? Ho abbreviati i calcoli [illegible] sono stati più lunghetti, perchè io, che Ella mi [illegible] [illegible] impegno, la supplico a perdonarmi. La cosa è [illegible] degna di schiarimento [illegible] più profondo rispetto

Di V. S. Ill.ma

Correggio 14 Ottobre 1879

Umil.mo e Dev.mo Servo
Giuseppe Cantarelli

[illegible] sempre quale mi
protesto

Di Lei Sig. Co. Prone Riv.mo

Padova. 20. Ottobre. 1779.

Il libro importa L 8. ch'Ella con suo comodo farà avere a mio Fratello.

Umil. Dev.o Obbl.o Servid.re
D. Pier-maria Solini.

6 MODENA

Al Nobile Sig.r Sig.r Pron Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo

Sig.r C. Pron.e Riv.mo

327

E finalm.te uscito alla luce il primo tomo dell' Opera del P. Maestro Vallotti, ed io conforme al di Lei comando, lo spedisco subito. Egli, com' Ella vedrà nella prefazione, ne promette altri tre, per i quali so, che ha detto ad un suo amico, che ha già i materiali in pronto, nè altro vi vuole sennonchè metterli insieme, e ripulirli alquanto. Ma egli passa gli anni 82. Giunto a Padova mi si fece incontro il Sig.r Matteo dall' Oboè guarito da una infermità, che prima, che io venissi costà, lo aveva ridotto vicino a morte. Il giorno di S. Giustina suonò qui nella musica, e 'l dopo pranso fece un concerto con cadenze tali da far dire, che non ebbe male alcuno; cosa, che fu di consolazione a tutti i galantuomini. E stato fatto sostituto al P. Businello, che vegeta ancora, un certo Ab.te Allegri Veronese, Figliuolo di uno, che a Verona ha l'impresa de Dacj, e che l'anno passato, o al più due anni fa, era qui scolare. Ella mi continui la sua grazia, e si assicuri, che sono, e sarò sempre quale mi protesto

Di Lei Sig.r Co. Pron.e Riv.mo

Padova. 20 Ottobre. 1779.

Il libro importa L 8 ch' Ella con suo comodo farà avere a mio Fratello.

Umil.o Dev.o Obbl.o Servid.
D. Pier-maria Solini.

[illegible]

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo

he mi
, senza
nio Sig.
re, che
la
drà a
o cenno
o buon
ormi.

Devo
i

re

Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Colmo

Bontà di V.S. Ill.ma inverso di me è quella, che mi ha reso ardito ad indirizzarle la acclusa lettera, senza prima avernelo reso consapevole. Li rendo il mio Sig.r Conte persuaso, che con ciò altro non ho inteso fare, che darle un attestato della mia stima, e rispetto per la sua degnissima Persona. Se il Sig.r Conte gradirà avere valore copia della stampata lettera, un suo cenno a ciò sarà bastante. Gradisca fra tanto il mio buon animo, e mi consideri quale, ho l'onore segnarmi.

V.S. Ill.ma Roma 13 Otto: 1777

Umilmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli

Padova

Divot. Obbl. Servitore
Giordano Riccati

Divot. Obbl. Servitore

Padova Giordano Riccati

38

All' Illmo Sig^re Sig^re Prone Col^mo
Il Sig^r Conte Giordano Riccati

Venezia ✠ Treviso.

331 359 3

357

355

JOSEPHI CALANDRELLI

IN COLLEGIO ROMANO MATHESEOS PROFESSORIS

EPISTOLA

SUPRA FALLACIAM

GALILEANÆ DEMONSTRATIONIS

ACCELERATI MOTUS IN RATIONE SPATIORUM

Ad Virum Clarissimum, atque Nobilissimum

COMITEM

JORDANUM RICCATI

ROMÆ MDCCLXXIX.

EX OFFICINA SALOMONIANA

Præsidum Facultate.

Tomo
2 a
latto
egua
mi.
udo
unni,
cha
in
scol:
ta
rma

...di,
pregandomi sommamente di farmi sempre più
conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1779.

P. Gian-Maria Rolina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

solam
atque
scripta
motum
men r
stration
ctum e
sculo
paralo
human
ras, F
strand
clariss

RICCATI CLARISSIME,

GRatiſſimas jam tuas litteras acceperam, cum opuſculorum Ferrarienſium liber primus nuperrime æditus in manus meas devenit. Legi inter alia opuſcula epiſtolam clariſſimi Joannis Andres ad virum nobiliſſimum, atque doctiſſimum Philippum Mariam Caſalium conſcriptam, in qua Galileanam demonſtrationem circa motum acceleratum Dialogo tertio expoſitam ad examen revocat; atque ipſam inter geometricas demonſtrationes enumerandam eſſe putat. Tibi dudum perſpectum eſſe ſcio, cl. fratrem tuum Vincentium Riccati Opuſculo 11I. Tom. 2. Galileanam ipſam demonſtrationem paralogiſmo laborantem exiſtimaſſe; quapropter pro tua humanitate veniam mihi daturum ſpero, ſi, per litteras, Fratris tui ſententiam confirmare conabor; demonſtrando, neque Gaſſendum, neque Fermatum, neque clariſſimum memoratæ epiſtolæ Auctorem, ſuis de-

 mon-

...ndi, pregiandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Trevigo 25. Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Zolina

Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore

Giordano Riccati

monſtrationibus Galileanam demonſtrationem a paralogiſmo vindicare. Scribo ad te ſine ulla cura ac verborum delectu, & dum tibi quod ſentio aperio, quibus verbis id faciam non laboro.

Fuit ergo in ea quandoque opinione Galileus; uti videre eſt in epiſtola ab ipſomet conſcripta; (Tom: 3. Ædit. Patav. pag. 34.) ſpatia a mobili naturaliter deciduo percurſa eſſe in ratione velocitatum. Hanc ſententiam poſt lapſum annorum fere triginta quatuor non modo immutavit, ſed etiam hypotheſim ipſam celeritatum nempe creſcentium in ratione ſpatiorum, impoſſibilem eſſe, demonſtratione conficere putavit. Dialogo ergo tertio Tom: 3. Ædit. Pat: pag. 95. Salviatum loquentem ita introducit. *Quando le velocità hanno la medeſima proporzione, che gli ſpazj paſſati o da paſſarſi, tali ſpazj vengono paſſati in tempi eguali; ſe dunque le velocità, colle quali il cadente paſsò lo ſpazio di quattro braccia, furon doppie delle velocità, colle quali paſsò le due prime braccia (ſiccome lo ſpazio è doppio dello ſpazio) adunque i tempi di tali paſſaggi ſono eguali: ma paſſare il medeſimo mobile le quattro braccia, e le due nell' iſteſſo tempo, non può aver luogo, fuorchè nel moto inſtantaneo. Ma noi vediemo, che il grave cadente fa ſuo moto in tempo, e in minore paſſa la due braccia, che le quattro. Adunque è falſo, che la velocità ſua creſca come lo ſpazio,*

Quid ſtatim ſenſerint Mathematici circa hanc Galileanam demonſtrationem videre eſt ex epiſtola Cazrei

ad

ad Gaſſendum conſcripta; in qua poſt expoſitam Galileanam demonſtrationem ita Cazreus. *Proh tuam, mi Gaſſende, Philoſophorumque omnium, ac Mathematicorum fidem! iſtud ne demonſtrare eſt?* Verum Gaſſendus in reſponſione ad ipſum Cazreum, quæ habetur Tom. III. Opuſculorum, non ſolum non putat paralogiſticam Galilei demonſtrationem: ſed ipſius partes ſumens, neceſſitatem motus inſtantanei, in hypotheſi celeritatum creſcentium in ratione ſpatiorum, adſtruit. Duas ergo lineas ſupponit, quarum una in partes æquales duodecim ſit diviſa, altera in ſex partes prioribus æquales; atque cum partes duodecim a corpore dupla velocitate, æquali tempore, motu uniformi conficiantur, ac partes ſex ab alio corpore ſimplici velocitate: hinc concludit, duas has inequales lineas motu accelerato in data hypotheſi percurri debere æquali tempore; ex eo quia tum motus uniformis, tum acceleratus in eo conveniant, quod ubique velocitas in linea duodecim partium dupla ſit. *At in eo*, inquit Gaſſendus, *motus conveniunt, quod ubique velocitas per totam AC dupla ſit velocitatis per totam* DE (Fig: 1.). Ex eo ergo quod tum AC, tum DE æquali tempore percurri debeant, concludit motum iſtantaneum per BC.

Facile fuit Cazreo Gaſſendo objicere velocitatem per DE ſubduplam non eſſe velocitatis per primam medietatem AB, ſed æqualem. Tunc ergo Gaſſendus ad puncta omologa linearum recurrens priſtinam ſuam reſtauravit demonſtrationem in ſecunda epiſtola ad Cazreum

3 5 7

3 5 5

Tomo
Z ..
latto
egua
...
...udo
...,
che
in
...
ha
...
o
...ima

...rdi,
pregandomi sommamente di farmi sempre più
conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25: Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Zolina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

in qua hæc habet: *Nam necessitas quidem inferendi ex eo manifesta est, quod Acceleratio fieri, aut velocitas crescere non possit æquabiliter per totam AC, neque similiter per totam AB, quin, si velocitas in C dupla sit velocitatis in B, qualibet partes analogæ acceptæ per totam AC; duplæ sint ad analogas per totam AB: atque ita, quin velocitas mobilis descendentis per AC sit perpetuo dupla velocitatis ejusdem mobilis descendentis per AB.*

Ad puncta omologa linearum recurrere non dubitavit Clariſ. Frater tuus, atque per iſta puncta demonſtrationem conficere, quæ tam valida prima fronte videri poteſt, ut nil mirum quod in errorem inducere potuerit per aliquod temporis ſpatium tuum ipſum Cl. Fratrem. In opuſculo ergo jam citato, lineas ipſas AC, DE in partes infinite minimas diviſas concipit; atque ex eo quod quælibet minima portio C*m* ſit ad E*n* uti 2 : 1; & ſic ſimiliter A*m* : D*n* = 2 : 1; concludit, ſpatiolum C*m* duplum E*n*, dupla velocitate, æquali tempore percurri debere. Cum ergo de omnibus omologis ſpatiolis idem verificetur; concludendum eſſe putavit lineas AC, & DE æquali tempore percurri debere; adeoque in ſecunda medietate lineæ ipſius AC, motum eſſe inſtantaneum.

Allatæ rationis paralogiſmum ipſemet Frater tuus in citata epiſtola ita clariſſime exponit. *Libenter tibi ultro concedo spatiola omnia* mC, 2mm; &c. *percurri eo tempore quo percurruntur spatiola analoga* En, 2nn, &c. *dum-*

359 3
357
355

dummodo excipias prima *Aim* , *Din* . *Hisce primis aptari non potest ratio, quæ valet in aliis omnibus* , *Etenim quum in punctis* m , n *velocitates finitæ sint* , *& earum incrementa per minimas* mC , nE *infinitesima* ; *licet* , *ut cuique notum est, supponere corpora per Elementa* mC , nE *æquabili motu cieri* , *at in primis Elementis* *Aim* , *Din velocitates in punctis A* , *D nullæ sunt* ; *in punctis* im , in , *sunt aliquæ quidem certe* .

Vellem hic mecum sentires , aliud esse demonstrare motum instantaneum ; ~~et aliud~~ hypothesis falsitatem cum experientia in hypothesi celeritatum crescentium in ratione spatiorum. Fratris tui allata ratio demonstrat quidem, motum instantaneum non dari per lineas AC, DE ; verum hoc non tollit falsitatem hypothesis celeritatum crescentium in ratione spatiorum ; nam si, consentiente ipsomet Fratre tuo, omnia spatia analoga , excepto primo spatiolo , æquali tempore percurruntur ; jam cum, experientia teste , differentia temporum inter *inE* ; post spatiolum percursum *Din* ; atque integram DE sit evanescens ; & sic similiter evanescens sit differentia inter *imC* ; post percursam *Aim* ; atque integram AC : jam sequitur , differentiam quoque temporum inter DE & AC esse quoque evanescentem ; quod experientiæ quidem repugnat . Ex eo quod etiam omnia spatia analoga æquali tempore percurrantur excepto primo , supervacaneum erit tibi acutissimo viro ostendere , corpora post percursionem spatiolorum *Aim* , *Din* in quacunque ratione finita , vel infinita inter se ; debere

Tomo 2 ... fatto ... eguale ... ndo ... che ... in ... scal... ha ... o ... ultima ... indi,

pregiandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Polini

Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

æquali tempore percurrere ſpatia *imC*, *inE*, quæ ſint uti percurſa ſpatiola *Aim*, *Din*: quæ quidem cum experientia manifeſte pugnant.

Hæc adnotanda mihi erant; clariſſimus ſiquidem epiſtolæ auctor Fratris tui argumentum contra metipſam theoriam Galileanam retorqueri poſſe putat; quod quidem mea ſententia potius ipſam Galileanam legem, accelerationis, nempe ratione temporum, confirmat. Si enim, inquit, laudatus Auctor, velocitates ſunt uti tempora; in fine C (Fig: 1.) ſecundi temporis, velocitas mobilis dupla erit velocitatis mobilis D in fine primi temporis E; dividendo ergo in tempuſcula minima ſecundum tempus BC, ac primum DE: velocitas A in quolibet puncto *m* temporis BC dupla erit velocitatis D in puncto correſpondenti *n* temporis DE: adeoque integro tempore BC velocitas A dupla erit velocitatis D per integrum tempus DE. Cum autem in *m*, & *n* velocitates finitæ ſint, & incrementa infiniteſima; hinc tempuſculo $mC = nE$; A, dupla velocitate duplum debet percurrere ſpatium; adeoque integro ſecundo tempore BC; A, duplum debet ſpatium percurrere; quod quidem Theoriæ Galileanæ contrarium eſt; ſiquidem tempore ſecundo non duplum, ſed triplum debet ſpatium grave percurrere. Facile autem eſt diſparitatem adducere; nam dividendo tempora æqualia BC & DE in tempuſcula minima, falſum eſt velocitatem A in quolibet puncto temporis BC duplam eſſe velocitatis D in puncto correſpondenti temporis DE. Adeo verum eſt

argu-

argumentum retorqueri non posse; ita ut, salva paritate, Galileana potius confirmetur Theoria. Et quidem, ut supra factum est, integra AC & DE dividantur in partes infinite minimas, erit quodlibet tempusculum $Cm : En = 2 : 1$, & cum in puncto m dupla sit velocitas, tempusculo duplo mC quadruplum spatium percurratur necesse erit. Jam vero ipsa ratiocinatio in tempusculis correspondentibus institui potest; ergo integro duplo tempore AC, quadruplum percurri debet spatium, uti postulat Theoria Galileana.

Videamus jam modo, utrum Fermatius in hujusmodi disquisitione meliori via procedat. In epistola ad Gassendum Tom. VI. ita rem conficere putat. *Intelligatur motus gravium descendentium a quiete ex puncto A (Fig. 2.) usque ad punctum H, verbi gratia, & supponatur, si fieri potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A usque ad H tempore unius minuti; aut altero quovis tempore determinato, & supponatur motus continuari usque ad punctum K. Ajo motum per HK fieri in instanti. Si enim motus per HK non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod per aliquem numerum multiplicatum excedet tempus in decursu spatii AH insumptum. Ponatur numerus multiplicans 5: ita ut tempus motus per HK quinquies sumptum excedat tempus motus per AH. Rectis KA, HA sumatur tertia proportionalis GA, & toties continuetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum nume-*

359 3

...comandi,
pregandomi sommamente di farmi sempre più
conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1739.

P. D. Gian-Maria Zolina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

rus excedat numerum quinque. Fiant ergo ex proportionalibus continuatis ſex, verbi gratia, ſpatia ultra punctum H, quæ ſint HG, GF, FE, ED, DC, CB. Ergo tempus motus per HG per præcedentem eſt æquale tempori motus per HK. Similiter tempus motus per GF, eſt æquale tempori motus per HK. Denique motus per totam HB fiet in tempore, quod ad tempus per HK erit ſextuplum. At tempus, temporis per HK quintuplum, eſt majus tempore motus per AH. Ergo a fortiori tempus motus per HB tempore motus per totam HA eſt majus: quod eſt abſurdum. Ergo vera remanet Galilei illatio, quamvis eam ipſe non demonſtraverit.

Hiſtec Fermatii demonſtratio ſupponit, uti vides, continuas proportionales KH, HG, GF, FE, ED, DC, CB, æquali tempore percurri in data hypotheſi, Fermatius demonſtrat quidem more veterum tempus per HK non eſſe majus, nec minus tempore per HG; ex quo concludit, tempora eſſe æqualia: verum cum ejus demonſtratio ob longinquitatem tedio ſit plena, liceat mihi breviter, & directe hoc idem oſtendere. Sint ergo KA, HA, GA, FA, EA, DA, CA, BA, continue proportionales, erunt jam, uti Geometria oſtendit, continue proportionales lineæ KH, HG, GF, FE, ED, DC, CB, atque in ipſa ratione inter ſe, ac ſunt ſuperiores. Cum celeritates ex hypotheſi ſint uti ſpatia, erit linea recta AQ, linea celeritatum. Dividantur KH, HG, in partes infinite minimas uti Gc, Ho; erit jam Ho : Gc = HK : HG = KA : HA = HA : GA: ſed celeritas in G ad ce-

celeritatem in H uti GL : HO = GA : HA : ergo; cum motus per infinitesimas Gc & Ho pro uniformi haberi possit, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum, & inversa velocitatum : sed ratio directa spatiorum ex dem: est HA : GA, & inversa velocitatum, GA : HA : ergo tempus per Ho æquatur tempori per Gc; sed hoc idem demonstrari potest in omnibus spatiolis correspondentibus : ergo tempus per integram HK æquatur tempori per GH.

Exposita Fermatii demonstratione quæ a Cl. Fratre tuo, & ab omnibus Mathematicis summis laudibus celebratur, dicam fidenter, ipsam, uti illam supra expositam, demonstrare hypothesim accelerationis in ratione spatiorum locum non habere in natura; sed non demonstrare juxta mentem Galileanam, in data hypothesi, dari motum instantaneum. Et quidem cum ex experientia, linea finita HK, post percursam AH, tempore finito percurratur: hinc; cum ex demonstratis a Fermatio, tempus per HK sit æquale tempori per HG, per GF &c. usque ad infinitum; supposita experientia, hypothesis accelerationis in ratione spatiorum locum habere nequit in natura, in qua motus per HA finito tempore conficitur. Verum facile animadvertes, Fermatium male concludere motum instantaneum per HK in data hypotesi accelerationis. Nam primo supponendo motum per HK finitum, absurdum deducit, nempe tempus per HB majus tempore motus per HA; sed non erat deinde statim deducendum, motum per HK esse instantaneum : videndum

A 6   enim

3 5 7

3 5 5

. Tomo
2 6
, latto
ugua
mi.
ondo
mun,
, che
in
accel-
che
mo.
agio
a ottima
er

migaa... comandi, pregandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Trevigo 25. Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Zolina.
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

enim erat utrum in tali hypotheſi tempus per HK poſſibile eſſet, vel infinite parvum, vel infinite magnum; atque primi, & ſecundi caſus demonſtrata impoſſibilitate, tunc legitima fuiſſet concluſio: ergo motus per HK in data hypotheſi erit iſtantaneus. Facile certe conficitur in data hypotheſi accelerationis, non modo repugnantia motus per HK tempore infinite parvo, vel infinite magno, ſed neceſſitas temporis finiti. Cum enim in data hypotheſi, percurſo ſpatio finito, finita acquiratur velocitas: jam in H finita erit velocitas; atque cum ſit velocitas in H, ad velocitatem in K uti AH : AK; jam in K finita quoque erit velocitas: ſed velocitate finita, ſpatium finitum, tempore finito, percurritur motu uniformi; ergo velocitate in H acquiſita, motu uniformi, tempore finito, ſpatium finitum HK percurri debet; & ſic ſimiliter motu uniformi celeritate in K acquiſita, ſpatium idem HK tempore finito percurri debet: jam vero tempus motus accelerati per HK, in data hypotheſi, eſt minus tempore motus uniformis per HK velocitate in H acquiſita: quia in omnibus punctis ſpatii HK velocitas creſcit; & tempus ipſius motus accelerati per ipſam HK, eſt minus tempore motus uniformis per HK velocitate in K acquiſita: quia in omnibus punctis ſpatii HK velocitas eſt minor, quam ſit in K: ergo tempus motus accelerati per HK eſt finitum. Communis eſt opinio, Fermatium demoſtraſſe, in hypotheſi accelerationis in ratione ſpatiorum, infinito opus eſſe tempore ut finitum ſpatium percurratur. Primus quod ſciam, qui hoc de Fer-

Fermatio afferat est Gastonus Pardies in præfatione ad suam Staticam. Stricte autem loquendo ex demonstratione Fermatii deducitur tempus infinitum per AK, quando prius demonstratum sit in dicta hypothesi tempus per HK esse necessario finitum; quæ quidem res demonstratu facilis est, at a Fermatio nedum verbis indicata. Primus autem qui clare demonstraverit tempore infinito opus esse per AK, in dicta hypothesi, est certe Ermannus in sua Foronomia. Cl: autem Frater tuus hoc idem diversa methodo demonstrat in citato opusculo.

Sed jam hic, vir clarissime, oritur difficultas. Si hypothesis celeritatum in ratione spatiorum exigit necessario tempus finitum per HK, quo modo ergo absurdum Fermatius ex hac suppositione deducit? Fermatius absurdum deducit quia falsum supponit in data hypothesi; & quidem falsum est tempus finitum per HK multiplicatum numero quolibet finito, superare tempus per AH in data hypothesi celeritatum. Cum enim linea velocitatum sit linea recta; si ergo ex punctis K, H, G, &c. ducantur normales quæ sint in ratione inversa linearum, quæ possunt areæ AKQ, AHO, AGL &c., atque inde curva dMNP resultet: jam ex Newtono (Princ: lib: 1. Pro. 39.) areæ AbdPK, AbdNH, &c. representare debent tempora per AK & AH in data hypothesi velocitatum. Jam vero cum areæ AKQ, AHO, AGL, sint triangula similia, erunt uti KQ^2, HO^2, GL^2, &c. ergo semiordinatæ KP, HN, GM, &c. sunt uti $\frac{1}{KQ}$, $\frac{1}{HO}$, $\frac{1}{GL}$ sive uti $\frac{1}{KA}$, $\frac{1}{HA}$, $\frac{1}{GA}$: ergo linea curva dMP erit Hyper-

bola

migliori. Se vaglio in servirla Ella mi comandi, pregiandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25: Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Rolina

Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

bola Apolloniana intra aſymptotos AK, Ab: ergo cum area AbdMNH ſit infinita, tempus per AH erit infinitum: falſum ergo quod in data hypotheſi velocitatum tempus finitum per HK mutiplicatum per numerum finitum poſſit ſuperare tempus per AH in dicta hypotheſi.

Iſtec Newtoniana doctrina primum a Fratre tuo adhibita eſt, atque mirifice conſentit cum demonſtratione Fermatii juxta quam tempora per KH, HG &c. ſunt æqualia; cum enim KA, HA, GA, &c. ſint continue proportionales in ipſa ratione ac lineæ KH, HG, GB, &c. inutile erit, tibi acutiſſimo viro oſtendere, areas HNPK, GMNH &c. eſſe æquales inter ſe,

In hac re diſſimulandum non eſt, quod ſi jam ex experientia ſupponatur tempus per AH finitum, atque ſimul quoque ſupponantur velocitates creſcere in ratione ſpatiorum; tum his duabus manentibus ſuppoſitionibus, facile erit oſtendere, motum inſtantaneum per HK. Cum enim ex hypotheſi celeritatum in ratione ſpatiorum; in H finita ſit velocitas; & ſic ſimiliter finita in K; jam HK percurri nequit tempore infinito, nec infinite parvo, uti ſupra jam demonſtravi. Si autem tempus per HK dicatur finitum; tunc cum finitum ex altera ſuppoſitione ſit tempus per AH, jam verificatur, tempus finitum per HK multiplicatum aliquo finito numero ſuperare debere tempus finitum per AH: adeoque verificatur abſurdum a Fermatio demonſtratum: tempus nempe per BH majus tempore per AH. Cum manentibus duabus ſuppoſitionibus motus per HK, nec infinite parvo, nec

357

355

nec infinito, nec finito tempore fieri possit, fiet ergo in instanti.

Forsan aliquis hic objicere posset, Fermatium, in suppositione quod motus gravium, ex experientia, tempore finito fiat per AH, demostrare motum instantaneum per HK. Verum si res ita se habet, non demonstrat Fermatius juxta mentem Galileanam motum instantaneum adeoque concludere nequit, ut ipse facit. *Ergo vera remanet Galilei illatio, quamvis eam ipse non demonstraverit.* Galileus intelligit dari motum instantaneum in hypothesi celeritatum crescentium in ratione spatiorum percursorum, nulla alia simul facta suppositione, ab experientia corporum deciduorum in natura desumpta. Revera Galilei demonstratio supra allata hypothesim in se considerat, nulla habita relatione cum experientia, atque ex mera hypothesis consideratione motum instantaneum deducit. Mentem Galileanam Gassendus bene assecutus est, adeoque, uti supra vidimus, nititur & ipse ostendere motum instantaneum in hypothesi accelerationis in ratione spatiorum, absque ulla suppositione experientiæ desumptæ a corporibus naturaliter deciduis.

Sed jam veniam ad demonstrationem a Clarissimo Andres expositam. Cum velocitates sint uti spatia; si ponatur (Fi: 2.) AK : AH = 2 : 1 jam dupla erit velocitas in K; adeoque grave in K motu uniformi velocitate in K acquisita percurreret 2AK, eo ipso tempore, ac in H velocitate acquisita in ipso puncto H motu uniformi percurreret 2AH. Sed tempus, quo grave mo-

ino Tomo
ro 24
ho fatto
pugna
avere.
risposto
i punti,
do, che
uto in
ll. accol:
, che
uno.
ragio
va ottima
stare

ingueori. Se vaglio in servirla Ella mi comandi, pregiandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1779.

R. D. Gian-Maria Zolina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

motu accelerato percurrit AK, æquatur tempori, quo motu uniformi, velocitate in K acquiſita, percurreret 2AK; & ſimiliter tempus quo grave motu accelerato percurrit AH, æquatur tempori quo motu uniformi velocitate in H acquiſita percurreret 2AH; ergo tempus motus accelerati per AH, æquatur tempori motus accelerati per AK; ergo HK in inſtanti percurritur.

Hic jam revocanda ſunt, quæ ſupra ſunt quoque obſervata. Galileum nempe ſua demonſtratione conficere velle in hypotheſi celeritatum creſcentium in ratione ſpatiorum, nullo abito reſpectu ad corpora per gravitatem decidua, dari motum inſtantaneum. Patet dictum: in demonſtratione ſiquidem Galilei nulla, ne verbo quidem, ſit mentio circa legem aliquam ab experientia deſumptam, cum qua comparando hypotheſim celeritatum creſcentium in ratione ſpatiorum ſequatur inde motus inſtantaneus. Patet etiam dictum; ita enim Salviatum loquentem inducit Galileus, *Per ora baſta al noſtro Autore, che noi intendiamo, che egli ci vuole inveſtigare e dimoſtrare alcune paſſioni di un moto accelerato (qualunque ſi ſia la cauſa della ſua accelerazione) talmente che i movimenti della ſua velocità vadano accreſcendoſi dopo la ſua partita dalla quiete con quella ſempliciſſima proporzione, colla quale creſce la continuazione del tempo, che è quanto dire, che in tempi eguali ſi facciano eguali additamenti di velocità, E ſe ſi incontrerà, che gli accidenti che poi ſaranno dimoſtrati ſi verifichino nel moto de' gravi naturalmente de-*

359 3

descendenti ed accelerati, potrēmo reputare che l' assunta definizione comprenda cotal moto de gravi, e che vero sia, che l' accelerazione loro vada crescendo secondo che cresce il tempo e la durazione del moto. Statim deinde subjungit Sagredus. *Per quanto per ora mi si rappresenta all' intelletto, mi pare, che con chiarezza forse maggiore si fosse potuto definire senza variare il concetto: moto uniformemente accelerato esser quello, nel quale la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio, che si va passando.*

Salviati verba manifeste demostrant, Galileum considerare velle affectiones cujusdam motus accelerati juxta legem aliquam non repugnantem, nullo habito respectu ad corpora per gravitatem naturalem decidua. Unam accelerati motus per Salviatum definitionem exponit, alteram per Sagredum, neque inquirere vult, utrum una vel altera conveniat experientiæ; sed tantum affectiones potius in prima definitione quam in secunda inquirit, quia per ipsum Salviatum impossibilem dicit Sagredi definitionem. Impossibilitas ergo enunciata, atque per motum instantaneum demonstrata non est impossibilitas respectu experientiæ, de qua nullus sermo in demonstratione, sed est impossibilitas ipsius definitionis; nam si sensus verborum perpendatur ipsa impossibilitas est ratio cur affectiones motus juxta Sagredi definitionem non inquirat. His observatis in demonstratione exposita supponitur jam hypothesis celeritatum in ratione spatiorum; deinde supponuntur corpora in fine spa-

357

355

ino Tomo
to 26
ho fatto
ripugna
ravoni.
rispondo
i punti,
do, che
uto in
ll. accel.
, che
uno.
ragio
va ottima
ssar

mizzarvi: se vaglio in servirla Ella mi comandi, pregandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25: Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Zolinà
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

ſpatii alicujus AH in H tantam acquirere velocitatem, ut *ipſo tempore*, quo motu accelerato percurritur *AH*, motu æquabili velocitate in H acquiſita poſſint duplum ſpatium AH percurrere; ſed hoc falſum eſt in hypotheſi accelerationis in ratione ſpatiorum; ſed neceſſarie verum juxta legem Galileanam, accelerationis nempe in ratione temporum. Verum ergo eſt, ſuppoſita lege Galileana accelerationis, atque ſuppoſita hypotheſi accelerationis in ratione ſpatiorum, ſequi motum inſtantaneum *per HK*: ſed hoc non eſt vindicare demonſtrationem Galileanam a Paralogiſmo; ſed rem plane diverſam demonſtrare. Si ergo per Sagredum motus acceleratus eſſet ille, in quo velocitates eſſent uti ſpatia ſimul, & uti tempora, tunc demonſtratio locum habere poſſet. Verum Sagredi definitio talis non eſt; & nimis iſta materialis fuiſſet; quis enim ſtatim non videt, tali definitione ſuppoſita, in motu uniformiter accelerato ſpatia eſſe debere uti tempora? quod motui uniformiter accelerato repugnat. Quin imo nec talem ſupponere poſſumus Sagredi definitionem; Galileus ſiquidem motum inſtantaneum demoſtrando, ne verbo quidem nominat definitionem per Salviatum expoſitam; nec aliquid in demonſtratione uſurpat quod ex Salviati definitione promanare poſſit; unde nec poſſumus concipere Galileum in ſua demonſtratione ſupponere gravia in fine deſcenſus tantam acquirere velocitatem, ut motu uniformi, ipſo tempore, duplum ſpatium poſſint percurrere, tanto magis etiam, quod hoc theorema

de-

3 5 9   3

demonstrat deinde, atque demonstrationem desumit à Salviati definitione, juxta quam celeritates sunt uti tempora. Atque ut hoc manifeste constet; (Pag. 95.), uti ab initio diximus, demonstrationem instantanei motus assignat; pag. autem (98.) theorema hoc exponit. *Tempus in quo aliquod spatium à mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, est æquale tempori, in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato, cujus velocitatis gradus subduplus sit ad summum, & ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.* Patet ergo manifestissime, Galileum in demonstratione motus instantanei supponere non potuisse id, quod nondum demonstraverat. Sed dicam ultra. Jam supponi nequeunt gravia in fine descensus tantam acquirere velocitatem, ut possint æquali tempore duplum spatium percurrere æquabili motu; quin & simul supponamus velocitates esse uti tempora. Ista facta suppositione; & manente simul altera suppositione, uti Cl: Andres facit in sua demonstratione, velocitatum nempe crescentium in ratione spatiorum, dico potius ex his duabus suppositionibus dari simul, & non dari motum instantaneum per lineam HK. Ex suppositione velocitatum in ratione temporum, sequitur necessario tantam acquirere debere mobile in fine descensus velocitatem, ut motu uniformi, acquisita velocitate, æquali tempore possit duplum spatium conficere. Ex hoc autem, atque ex suppositione quod velocitates sint uti spatia; sequitur, uti optime demostrat Clarissimus Andres, motus instan-

3 5 7

3 5 5

mo Tomo
to 26
. ho fatto
pugna
ravvivi.
rispondo
i punti,
do, che
uto in
ll'accel.
, che
uno.
ragio
va ottima
ssar

migliori. Se vaglio a servirla Ella mi comandi, pregiandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Zolina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

inſtantaneus; Cum autem velocitates ſint uti ſpatia; juxta unam ſuppoſitionem, & juxta alteram ſint uti tempora quibus ſpatia conficiuntur; hinc cum ſit ſpatium AH : AK = 1 : 2; erit velocitas in H ad velocitatem in K uti 1 : 2 per primam ſuppoſitionem; atque tempus per AH ad tempus per AK uti 1 : 2 per ſecundam ſuppoſitionem: ergo motus per HK ſit in tempore.

Ex argumentis prolatis unuſquiſque conjicere poteſt, impoſſibile eſſe a paralogiſmo demonſtrationem Galileanam vindicare: neque hoc gloriam incomparabili Galileo imminuere poteſt; ſuos enim quandoque manes ſummus Newtonus paſſus eſt, pati ergo potuit & ſuos Galileus. Sed jam deſinens, quæſo obteſtorque humanitatem tuam, ut quid de hoc ſentias, ad me ſcribere ne graveris, & tibi ita plane perſuadeas, me non tantum mihi tribuere, ut nullo pacto errare me potuiſſe credam. Vale & fave.

Romæ X. Kal. Octob. CIƆIƆCCLXXIX.

ſpatia,
int uti
patium
itatem
empus
m ſup-

re po-
ionem
ompa-
uando-
go po-
obte-
ntias,
erſua-
cto er-

3 5 9 3

3 5 7

3 5 5

imo Tomo
ato 24
, ho letto
ropugna
inavami.
rispondo
to i punti,
ndo, che

uito in
elli accol=
ui, che
uno.
vagio
ava ottima
esser

migliorare. Se vaglio in servirla Ella mi comandi,
pregiandomi sommamente di farmi sempre più
conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1779.

P. D. Gian-Maria Zolina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

IMPRIMATUR

Si videbitur Reverend. P. Mag. Sac. Palatii Apoſtolici.

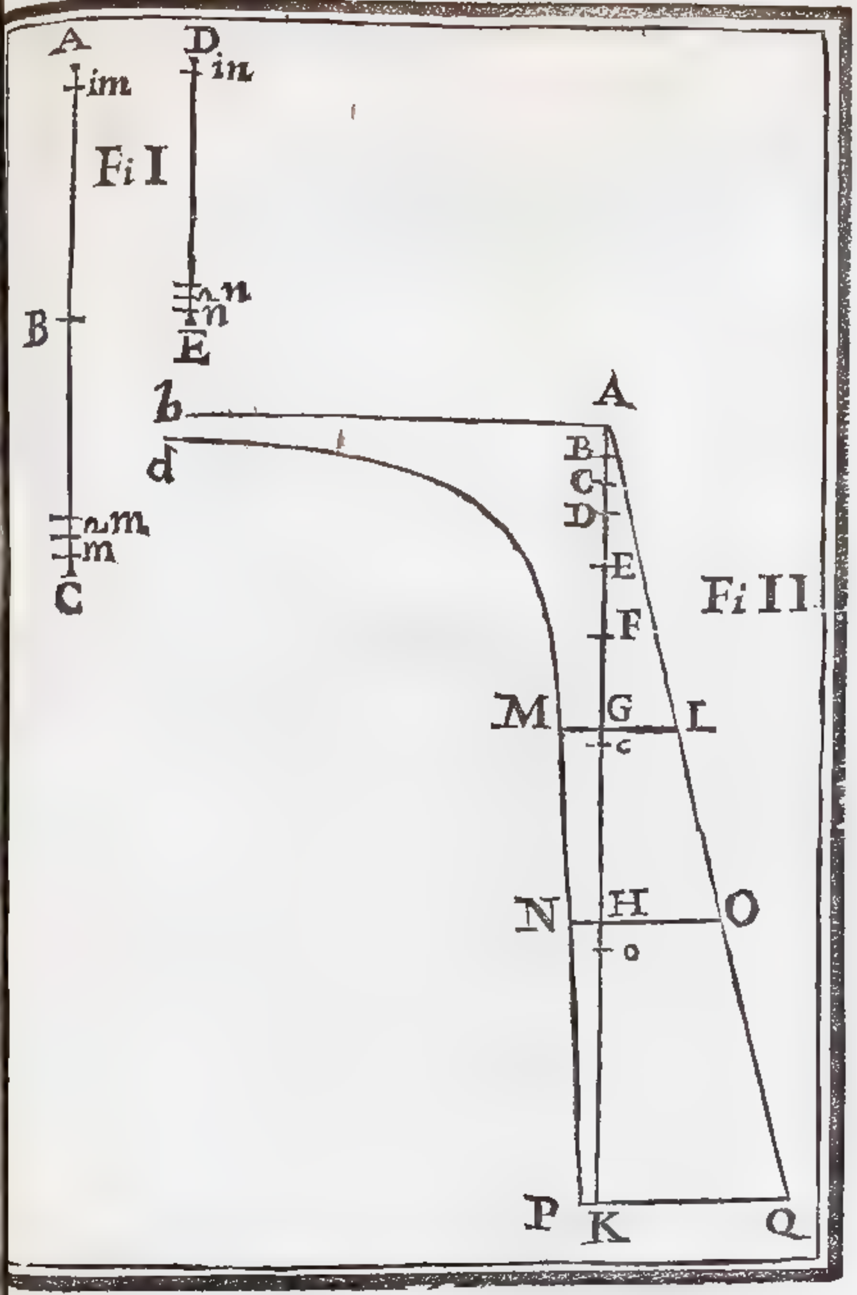
F. A. Marcucci ab I. C. Epiſcopus Montis-Alti, ac Viceſg.

IMPRIMATUR

F. Pius Thomas Schiara Ord. Præd. Sacri Palatii Apoſtolici Magiſter.

3 5 7

3 5 5



imo Tomo
ato 26
i ho letto
repugna
inavvi.
rispondo
o i punti,
edo, che

uito in
ell' accol:
ui, che
uno.
vagio
eva ottima
essere

migliori. Se vaglio in servirla ella mi comandi,
pregiandomi sommamente di farmi sempre più
conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25. Ottobre 1779.

P.D. Gian-Maria Colina
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Sig. P.rone Col.mo 359

357

Molto Rev.do P.re Sig.re Sig.re P.rone Col.mo 355

In somma mia obbligazione ho ricevuto il primo Tomo dell'Opera del P. M. Vallotti, per cui ho contato Σ 6 al Sig. Nicoletto degnissimo suo Fratello. L'ho letto subito avidamente, ed ho trovato che m'impugna in più di un luogo senza per altro mai nominarmi. Avendomelo ancor egli spedito in dono, gli rispondo ringraziandolo, lodando l'Opera, e notando i punti, ne' quali in cui da me dissente, nei quali io credo, che la ragione stia dal mio canto.

molto piacere che il Sig. Matteo si sia restituito in buona salute, e che nulla abbia discapitato nell'eccellenza del suonar l'Oboè. Questi sono Uomini, che meritano di vivere prosperosi. Col far Lettore uno, che due anni fa era Scolare, si accrescerà il pregio a cotesta Università. Qui abbiamo un'Opera ottima in riguardo ai Cantanti. I balli potrebbero esser migliori. Se vaglio in servirla Ella mi comandi, pregiandomi sommamente di farmi sempre più conoscere quale mi dichiaro

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 25: Ottobre 1779.

P. L. Giov. Maria Rolinà
Padova

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

3 5'4

3 5'61

Ill.mo Sig. Sig. P.rone Col.mo 359 3

357

3 5'4

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo 359 3

[illegible] 357

[illegible]

[illegible]

[illegible]

3 5' 4

3 5' 6

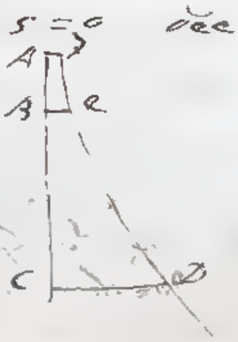
Illmo Sig. Sig. Prone Colmo 359 3

3 5' 4

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo

La Lettera, che V. S. Illma mi ha fatto l'onore di indirizzarmi con somma mia obbligazione, mi è stata spedita da Treviso a Castelfranco, e trovandomi io portatomi alla villeggiatura di un Cavaliere mio Amico, non ho potuto allora salvochè scorrerla. Ritornato a Castelfranco, l'ho presa per mano pesatamente, e l'ho trovata degna di Lei; e tale che mette in pienissima vista lo sbaglio preso dal Sig. Ab. Andrea nel voler difendere la supposta dimostrazione Galileana. Quando si esamina un'ipotesi, fa di uopo dedurre le conseguenze dall'ipotesi stessa senza mescolarla con altre. Se le velocità stanno come gli spazj, necessariamente ne segue, che principiando dalla quiete, qualsivoglia spazio benchè menomissimo si passerebbe in tempo infinito; il che fa vedere, che in tale supposizione, il corpo fisicamente non si moverebbe.

Porrò qui una dimostrazione simile a quella dedotta dalle aje iperboliche. Poichè $\frac{ds}{u} = dt$, fatta $u = \frac{s}{a}$, avremo $\frac{a\,ds}{s} = dt$, e conseguentemente integrando $ls = t$ nella logistica della suttangente a, e preso il nulla per protonumero; perchè ad $s = 0$ dee corrispondere $t = 0$. All'asse AC si descriva la logaritmica DeD della suttangente a, in cui supposto il protonumero $AD = 0$, le assisse AB, AC dinotino



[illegible] $\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$ ha le quattro radici $\pm\sqrt{-2a} \pm \sqrt{b + 2a^2}$, e nella seconda è fornita dalle altre tante $\pm\sqrt{2a} \pm \sqrt{b + 2a^2}$. Perchè tanto $\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$,

quanto

dinotino i tempi, e le ordinate BC, CD gli spazj. Se
nella nostra curva un'ordinata sta all'altra in ragion
minore di qualunque data, l'intercetta fra queste
due ordinate è infinita: ma supposta AZ = 0, e
BC infinitesima, la proporzione di AZ a BC è mi-
nor di qualunque data; dunque l'intercetta AB
significante il tempo è infinita, e per conseguenza lo
spazio anche menomissimo BC non si potrebbe scorrere salvochè nel
tempo infinito AB. Se sia finita l'ordinata CD, lo
spazio CD – BC si passerebbe nel tempo BC, che
sarebbe bensì infinito, ma per altro immensamente
minore di AB; perchè la ragione del nulla a
è infinitamente più piccola di quella di BC : CD
Per la qual cosa l'assurdo, che il Galileo dovea ve-
ramente inferire dal tempo infinitamente lungo,
l'ha falsamente dedotto dal tempo istantaneo. L'
errore è patentissimo, e dimostrato, nè so come
il Sig. Ab. Andres si sia dato a credere di poterlo
difendere.

Se per qualche occasione, che se le presentasse, mi spedisse
alcuna copia della sua bellissima Lettera, avrò il pia-
cere di farne parte agli Amici, che dilettansi di tali
studj, e nuovamente ringraziandola delle onore
impartitomi, con vera stima e rispetto mi segno

Castelfranco 10. 9bre 1779 Di V.S. Illma

Illmo Sig. Ab. Giuseppe
Calandrelli. Roma.

Umilissimo Obblmo Servitore
Giordano Riccati

lo le sue
d'altra
che la
e io, che
$\pm\sqrt{-2a^2\sqrt{2b}}$,
$\pm\sqrt{2a^2+b}$,
$\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$
la prima
le radici
b,
a la prima
$\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}$
$2a^2+b$.
e non
si molto

[illegible] $\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ ha le quattro radici $\pm\sqrt{-2a}\pm\sqrt{b+2a^2}$, e nella seconda è fornita dalla altra tutte $\pm\sqrt{2a}\pm\sqrt{b+2a^2}$. Poichè tanto $\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, quanto

ricer
moss
Rest
vent
la
$=\sqrt[4]{}$
ma
Detto
$x\sqrt{}$
$\pm x$
$\pm x$
qua
$x^4 +$
Nell
o
ave
scop
sua
$-\sqrt[4]{}$
trov
dai
dagg
$\sqrt[4]{\frac{b}{2}}$
$\pm\sqrt{}$
tutte

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Col.mo 363

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 361

dai in altre
ricevuto la dottissima lettera di V. S. Ill.ma, mentre era sulle mosse per Castelfranco, ed altre villeggiature di miei Amici. Restituitomi finalmente a Castelfranco con animo di trattenermi tutto questo mese, e letta con attenzione la lettera, rifletto che dal trovarsi tanto x, quanto $x\sqrt{-1}$
$= \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$; io non dedurrei $x = x\sqrt{-1}$, che possono comparire
ma bensì che x, ed $x\sqrt{-1}$ sono due diverse radici, dalla sopradetta formola. E voglia il vero, facciasi

$$x\sqrt{\pm 1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$$, e si troverà

$$\pm x^2 = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} \mp 2a$$, e quindi

$$\pm x^2 \pm 2a = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$$, ed alzando al

quadrato $x^4 + 4ax^2 + 4a^2 = b + 2a^2$, e finalmente
$x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, formola, da cui nasce la sovrascritta. Nell'elevare al quadrato $\pm x^2 \pm a$ io mi sono servito o dei due segni positivi, o dei due segni negativi. Se avessi posti in opera i segni contrarj $\pm x^2 \mp 2a$, avrei scoperto $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, e perciò ella è vera la sua asserzione, che l'equazione $x\sqrt{-1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$
$- \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$ può derivare da $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$; Se proviene dalla formola $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, deggio valermi dei segni simili, e se proviene dall'altra $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$ deggio far uso dei segni contrarj. Nella prima ipotesi la formola
$\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$ ha le quattro radici
$\pm\sqrt{-2a} \pm \sqrt{b + 2a^2}$, e nella seconda è fornita dalle altre-tante $\pm\sqrt{2a} \pm \sqrt{b + 2a^2}$. Perchè tanto $\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$,

quanto

3 6r

quanto $-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ ha quattro valori, io deggio, fra gli otto valori scegliere quei quattro, che si confanno colla una, o colla altra equazione $x^4+4ax^2+2a^2-b=0$, $x^4-4ax^2+2a^2-b=0$, ognuna delle quali contiene soltanto quattro radici. Io penso che le addotte riflessioni possano essere sufficienti per ischiarare i suoi dubbi, la soluzione de' quali dipende dai quattro valori, che si può appropriare ciascuna delle radici quarte.

Col Prodromo della Enciclopedia, che volea pubblicare il S. Ab. Alessandro Zorzi, uscirà una mia Dissertazione sopra il Suono falso, che avrò piacer ch'Ella legga, e mi significhi il riputatissimo suo parere. Questo argomento per quanto io so non è stato più trattato, nè meritava di essere trascurato. Mi continui la preziosa sua grazia e corrispondenza, e si assicuri ch'io sono e sarò sempre

Di V. S. Illma

Castelfranco 12 9bre 1779.

P. S. Non lascio di avvertire, che ponendo nella formola $x^4+4ax^2+2a^2-b=0$ $x\sqrt{-1}$ in cambio di x, si muta essa nella altra $x^4-4ax^2+2a^2-b=0$: Nondimeno sostituito $x\sqrt{-1}$ in vece di x nella formola seconda si cangia nella prima. Potrebbe ciò persuaderci, che in siffatta guisa si muta la proposta equazione. La cosa scritta di sopra scioglierà questa difficoltà, avendo fatto vedere, che anche la formola $x\sqrt{-1}=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ conduce alla equazione $x^4+4ax^2+2a^2-b=0$.

Umilmo Devotmo Servitore
Giordano Riccati

Illmo Sig. Ab. Giuseppe Cantarelli
Modena.

Sarà un mese e mezzo in circa, ch'io scrissi da Correggio a V.S.Ill.ma ringraziando Lei sue due lettere gentilissime da cui ho moltissimo imparato l'una de 27 Agosto, l'altra de' 29 settembre. Non vedendo io sinora avuta alcuna risposta, temo assai, che la mia non sia perduta. Replicherò dunque i dubbj, che io già le proposi. Diceva io, che dall'equazione $x^4-4ax^2+2a^2-b=0$ si ricava $x=\pm\sqrt{2a\pm\sqrt{2a^2+b}}$, $x\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-2a\mp\sqrt{2a^2+b}}$ Vedendo $\left(\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}\right)^2=\left(\pm\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}\pm\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}\right)^2=2a\pm\sqrt{2a^2+b}$, e $\left(\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}\right)^2=-2a\pm\sqrt{2a^2+b}$, si avrà $x=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, $x\sqrt{-1}=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$: dunque posto $a^4>\frac{b^2}{4}$ si vedendo per 2 la prima si ridurrà all'espressione de' seni, l'altra a quella de' seni circolari e però le radici dell'equazione si potranno esprimere nell'una e nell'altra maniera

Ora mi volgo all'equazione $x^4+4ax^2+2a^2-b=0$, da cui si ha $x=\pm\sqrt{-2a\pm\sqrt{2a^2+b}}$, $x\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2a\mp\sqrt{2a^2+b}}$: dunque $\frac{x}{2}=\frac{\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}{2}$ $\frac{x\sqrt{-1}}{2}=\frac{\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}{2}$. Il Conte Abate Vincenzo moltiplica la prima di queste due ultime espressioni per $\sqrt{-1}$, e ricava $\frac{x\sqrt{-1}}{2}=\frac{\sqrt{-1}\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt{-1}\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}{2}$. Fui per questo cammino reso, perchè $\left(\sqrt{-1}\left(\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}\right)\right)^2=2a\pm\sqrt{2a^2+b}$ Ma se s'innalza $\sqrt{-1}$ alla potenza di 4, s'avrà $\left(\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}\right)^2=-2a\mp\sqrt{2a^2+b}$, il che pare un assurdo. Non so spiegare questo mistero, se non dicendo, che $\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ è una espressione ambigua. Se vuol inten=

[illegible]

quale mi prevalgo di Lei, e desidero che ella faccia il ?.

Deve moltiplicata per l'unità esprimere una quantità immaginaria, ciò, se intendasi molti[illegible]
plicata per $\sqrt{-1}$, di cui la quarta potestà eguaglia la stessa unità esprimerà una quantità reale.
Ho esposto in breve il mio concetto. Desidero ansiosamente la sua decisione, e il giudizio
intorno alle conseguenze, che se ne possono ricavare riguardo alla equazione Riccatiana.
Leggo annunziata nelle Effemeridi di Roma una lettera in nome dell'Illmo Sig. Abate Calandr[illegible]
diretta a V.S. Illma
ch'io sento nominare la prima volta, contro il Sig. Abate Andres. Anch'io ho con[illegible]
mente di questo Spagnuolo, come ella vedrà, nel Tomo XVIII di questo Giornale uscito
sono già più d'un mese. La supplico a significarmi liberamente il suo sentimento
intorno a questa, e ad altre mie scritture ivi pubblicate senza il mio nome. Resto con
[illegible] [illegible] amandi [illegible] [illegible]

Di V.S. Illma

Modena 30 Novembre 1779

Umilissimo e devotissimo Servitore

Giuseppe [illegible]

per bisog-

quale mi prevalgo di Lei, e desidero che ella faccia il ?.

Al Nobile Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

llmo Sigre 365

n gran pezzo che V.S. ho avuto l'onore di scriverle, ne di
cevere sue carissime nuove. L'occasione di rinnovarle una
nomodo mi procurerà l'uno e l'altro. Averei dunque biso-
no di V.S.ª 10 pezze di corame nero del solito, e che siane
l nero e sottile perche hanno da servire per fornimenti,
endo finito tutto quello che mi ha mandato in altri
empi. Per il pagamento ne indicherò il recapito che deggi
meli, nel quale computerò la spesa che feci nella compra
lle Inscrizioni Analitiche, che in opera del anno scorso
le spedii alla direzione del S. Cornino di Padova, che
ono L 35 nostre o siano paoli 70, dalle quali dovrà
efalcare il prezzo di due copie delle lettere meccaniche
el S. Sicuri che ho dato a Mons. Bouflodi, e Card.
aladini, delle quali io ne ho voluto il prezzo, ma che
ne restino a mio carico. Scusi la libertà con la
quale mi prevalgo di Lei, e desidero che ella faccia il

366

simile di me. Ella avrà saputo l'afflizione in cui sia[mo]
stati pel terremoto, e dalla quale non ne siamo ne me[no]
liberi sebbene minori siano all'ora dell'[...]
novamente visitati con varie scosse ed una gagliarda, e [...]
ne siamo quieti. Dio ci assista per sua misericordia. [...]
dica della sua salute, e de suoi studi, e scusi [...]
pregandola della continuazione della sua preziosa [...]
e memore sempre dell'Obbligazione che ho alla [...]
Sua Casa mi protesto di essere con somma stima,
somma riconoscenza
Di Lei Sig. P.ron Col.mo

Bologna 30 9bre 1779

Div.mo ed Obb.mo S[re]
Giac.o Mariscotti Brazzalli

Illmo sigr sigr e Pron Colmo

5

Al Nobil Uomo

Il Sig.r D.r Giordano Ricati

Venezia

Treviso

Ricevo la gentilissima lettera di V. S. Ill.ma scritta da Castelfranco insieme con quelle lettere, e mediterò le sue dotte ed acute riflessioni, le quali si è degnata per la sua infinita bontà di spiegarmi in avvenire. Poichè ella ha la bontà e pazienza di esaminare i miei dubbj, mi permetta di proporle i seguenti difficoltà. Se la formola fosse $x\sqrt{-1} = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ $\pm\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, allora senza dubbio s'avrebbe $\pm x^2 = \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} + \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} \pm 2a$; ma poichè i due radicali $\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$, $\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ sono forniti di segni contrarj, è chiaro che a $2a$ non si attribuisce il segno ambiguo, ma il segno − elevando al quadrato. Questa è la prima. La seconda riguarda la costruzione. Ella si accinge a costruire $\frac{x\sqrt{-1}}{2} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}$ col mezzo de' seni circolari. Conviene che sia

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}{2} = \frac{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sen}\,\varphi)^{\frac{1}{4}} - (\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sen}\,\varphi)^{\frac{1}{4}}}{2\,\cdot^{-\frac{3}{4}}}$$

ma questa è scevra di quantità immaginarie. Dunque anche $\frac{\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^4-\frac{b^2}{4}}}}{2}$, e però $= \frac{\pm\sqrt{-2a\pm\sqrt{2a^2+b}}}{2}$, non $= \frac{\pm\sqrt{2a\pm\sqrt{2a^2+b}}}{2}$: Dunque $x\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-2a\pm\sqrt{2a^2+b}}$; ma questa deriva dall'equazione $x^4-4ax^2+2a^2-b=0$: dunque si sviluppa a costruire le radici di questa, non della equazione $x^4+4ax^2+2a^2-b=0$. Perdoni V. S. Ill.ma s'io sono importuno. La cosa mi sembra degna della sua attenzione.

Non è ancora comparso qui il Prodromo accennatomi da lei. Leggerò ben volentieri ... mio profitto la sua dissertazione, giacchè non ho mai fatto alcuno studio sulla Teoria

de' Faentini, possa io farsi un nuovo tentativo, per trovare qualche Stamperia, che volesse addossarli.

del mono. Spero d'emparar molto, ma non so, se sarò in istato di ben giudicare per la [illegible]
za delle cognizioni di cui ora son privo. Vienmi detto, che il Sig.r Abate Vanauxgarden ha
preparata la Edizione della Meccanica dell Sig. Conte Abate Vincenzo L'opera manu-
scritta [illegible] dell autore è però sarà da tutti accolta con sommo plauso.
Resto in profondo ossequio

[illegible] dicembre [illegible]

Umil.mo e Dev.mo Servitore
[illegible] Ciaravelli

dei Fiorentini, possa ivi farsi un nuovo tentativo,
per trovare qualche Stamperia, che volesse addossarsi.

All'. Nobile Sig.r Sig.r Pron Col.mo

Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Illmo Sigre Sigre Prone Colmo 371

369

Illustriss. Sig. Sig. Pron Colo

Appena ritornato dalle mie ingerenze a questa Capitale, ho chiamato il Sig. Mulini, per discorrere con esso Lui della sua Opera sul Contrapunto &. Egli mi ha detto, che non ha potuto risolversi della nota Edizione, perchè p 500 Esemplari ci vogliono Scudi 1200. Che gli Stam. patori Fiorentini non fanno mai tali imprese a conto loro, e che perciò gli rincresceva di non poter venire a capo di tale affare ne p conto suo, ne p conto di alcuno Stampator Fiorentino. Per quanto io abbia detto sullo spaccio sicuro di un Opera così bella e d interessante, nulla ho potuto ottenere. Onde si ho voluta assicurare, con farmi portar l' Originale, che ora è appresso di me.

Premendomi molto il scriola, se sarà possibile, io fatto pensiero, che dovendo io presto andare à Siena p un altro mio affare, ed essendovi in tal Città inltre. Dotte molte stamperie con impresari più coraggiosi dei Fiorentini, possa ivi farsi un nuovo tentativo, per trovare qualche Stamperia, che volesse addossarsi

330

la spesa dell' Edizione con condizioni ragionevoli.
Farò adunque tal tentativo, e poi le renderò risposta.
Con è lo stato della nota Edizione presentemente.
Desidero, che qualche cosa mi scriva su questo mio
pensiero, e quali siano le condizioni, che potessero
mandarsi a Siena. Avrei desiderato una miglior
riuscita al mio operato, ma quando gli ostacoli son
gravi, e reali, poco giovano i trattati, e le persuasi-
oni. La prego a spiegarmi i suoi sentimenti, m
certa più sincera stima, ed Amicizia mi dico

Di V. S. Illma e

Firenze li di 5. Dicembre

All' Illustriss.^o^ Sig. Conte
Giordano Riccati.
Treviso.

Devotiss.^o^ ed Ob.^o^ Serv.^e^
Leonardo Ximenes

Illmo Sigre Sigre Prone Colmo

[illegible]
[illegible]
[illegible]
Ab.
scr
[illegible]
che
[illegible]
[illegible]
che
pa
[illegible]
Na
no
[illegible]
on
[illegible]
us
[illegible]
[illegible]
na
in
in
[illegible]
[illegible]
[illegible]

Al num. 44. delle Novelle di Firenze del 29. Ottobre
1779. comparendo essere uscito in Siena il Prodromo
della nuova Enciclopedia Italiana ideata dal Sig.
Ab. Alessandro Zorzi di chiara memoria. Mi
scrisse V. S. Ill.ma il primo, che sperava di farmi
tenere siccome ad Autore 12. copie del Prodromo,
che sin d'allora era già stampato, e che aveva
avvisato lo Stampatore Giuseppe Pazzini di
Siena, che nell'Involto di Esemplari vendibili,
che mandava a Venezia, ve ne inserisse uno a
parte diretto a me, pregando il Librajo suo cor-
rispondente di trasmettermelo tosto a Treviso.
Nel mio ritorno dalla villeggiatura in Città
non avendo trovato, come io sperava, il Pro-
dromo, mi rivolgo a Lei, acciocchè mi
onori di scrivere al Pazzini, che me lo faccia
tenere.

È uscito in Padova il Libro primo della Scienza
teorica, e pratica della moderna Musica del P. F.
Francescantonio Vallotti M. C. Maestro di Cappella
nella Basilica di S. Antonio di Padova, nel quale
in più luoghi impugna senza nominarmi il mio
Saggio

in tal guisa io m'interesso per la quinta parte
della spesa dell'edizione. Dovrà poi chi intra-
prende l'edizione, farmi il dono di un competente
numero di copie, nella qual cosa interamente a
Lei

Saggio sopra le Leggi del Contrappunto. Nella scorsa villeggiatura mi sono divertito scrivendo parecchie annotazioni, che mettono in chiaro gli sbagli presi dal P. M. Vallotti. Penso per altro di non far uso delle dette annotazioni, essendo egli da moltissimi anni mio amico, ed ora più che ottuagenario. Se si stamperà o in Francia, o in Spagna l'Opera, della quale il Saggio è un compendio, servirà essa di tacita confutazione.
Ed attendendo ai pregiatissimi suoi comandi, e desiderosi di leggere, e di gustare il suo Articolo sopra il Lotto, pieno di rispettosa stima mi sottoscrivo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 10 Xbre 1779.

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Servitor Vero
Giordano Riccati

in tal guisa io m'interesso per la quinta parte della spesa dello edizione. Dovrà poi chi intra= prende la edizione farmi il dono di un competente numero di copie, nella qual cosa interamente a Lei

e la
tan
che
alt
Ope
l.
chi
me
si
la
il
cha
di
sua
uav
gli
ad
asc
in
da
nu
mu

Ill.mo Sig.r Conte Pron mio col.mo 375

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 373

e le protesto infinitamente obbligato pel maneggio tenuto col Sig. Mulini, e per la benigna disposizione che ha di far nuovi tentativi in Siena. Il calcolo per altro di scudi 1200 dell'edizione della mia Opera è molto esagerato. Io tengo fra i miei libri l'Esemplare del P. M. Martini in due tomi in foglio, ch'è pieno pienissimo di note musicali, il quale mi costa £ 16. Supponiamo, che la mia Opera si facesse pagare £ 20. o sia 2. scudi, e fatta la riflessione, che gli Stampatori vendono i libri il doppio di quello, che a loro costano, ne deduco che 500. esemplari importerebbero la spesa di altrettanti scudi. Io sono intimamente persuaso, che questo computo sia molto prossimo al vero.

Agli Stampatori di Siena io faccio l'esibizione di addossarmi l'esito di 50. copie al prezzo per esempio di 2. scudi, che verrà stabilito, ed in tal guisa io m'interesso per la quinta parte della spesa dell'edizione. Dovrà poi chi intraprende l'edizione, farmi il dono di un competente numero di copie, nella qual cosa interamente a

Lei

374

Lei mi rimetto.

È uscito in Siena il Prodromo della nuova Enciclo-
pedia Italiana ideata dal Sig. Ab. Alessandro Zorzi
chiara memoria. In esso si contiene una mia dis-
sertazione, che tratta del Suono falso, intorno il
quale non so che alcuno abbia versato. Se ella
la leggerà, e mi scriverà il suo parere, mi terrò
sommamente onorato.

Le replico i miei ringraziamenti per la vera prem-
ura che ha di favorirmi, e colla più cordiale stima mi
dichiaro

Di V.S. Illma Treviso 13. Dicembre 177

Illmo Sig. Ab. Leonardo Ximenes.
Firenze

Divotmo ed Obblmo Serv.
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Conte Pron mio col.mo

Ancor
al
la
e si
tur
Von
le
ne
Je
co
Venec
e
co
e
Di
vera
Ch.q

Ill.mo Sig.r Conte Pron mio Col.mo 375

Ancorchè Ella abbia letto, che il Prodromo si è stampato fin al settembre passato, non dee credere, che sia affatto vera la cosa. Saranno sol due mesi, che la stampa è finita, e si è dovuto tardare a pubblicarlo per ragione delle legature nobili delle copie che vanno ai Sovrani, le quali i Sig.ri legatori di Roma ce le han fatte aspettare due mesi. Non so che il Pazzini stampatore di Siena abbia ancora spedite le Balle: ei mi diceva nell'ultima sua, che aspettava l'occasione de' vetturali. Qui certo non s'è venuta ancora nessuna copia. Ella dunque sia certa, che la Balla per Ferrara sarà unita a quella per Venezia, e che quasi contemporaneamente ed Ella ed io avremo le copie desiderate.

Sento dalla pregiatissima sua che Ella ha risposto al P. Maestro Vallotti. Se la dissertazione sua fosse un opuscolo corto, e le piacesse d'inserirla in questa Raccolta d'Opuscoli che si stampa a Ferrara, ne faccia un involto, l'indirizzi a questo Sig. Abate Meloni Editore, che desidera qualche cosa sua da inserire, e cui io già parlato, e sarà servita. Mi manca il tempo di conversar più a lungo con Lei, e però con tutto il rispetto mi dico

Di V.S. Ill.ma

Ferrara li 22 Xbre 1779

Dev.mo Obblig.mo servitor vero
G. Franc.o de Malfatti

verà $\frac{1}{2}x = \frac{Ch.\varphi}{4}$, $\frac{b}{r} = \frac{Ch.\varphi}{r^{-3}}$; $\frac{\sqrt{b^2 - a^4}}{4} = \frac{Sh.\varphi}{r^{-3}}$, e giacchè $Ch.\varphi^2 - Sh.\varphi^2 = r^2$, sostituiti in cambio di $Ch.\varphi$, $Sh.\varphi$ i loro

valori

vavà $\frac{1}{2}x = Ch.\frac{\varphi}{4}$, $\frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi}{r^{-3}}$; $\sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4} = \frac{Sh.\varphi}{r^{-3}}$, e giacchè

$Ch.\varphi^2 - Sh.\varphi^2 = r^2$, sostituiti in cambio di $Ch.\varphi$, $Sh.\varphi$ i loro

valori

Al Nobile Sig.r Sig.r Prone Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

8

P Venezia a

P Treviso

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 365

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 377

piacere, che sia pervenuta a V.S. Ill.ma la mia lettera de' 12. 8bre. Aggiungerò presentemente alcune riflessioni, che metteranno in chiaro l'aggiustatezza del metodo di mio fratello. L'una, e l'altra formola $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} \pm \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}$ dipende dalle due equazioni $x^4 \mp 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$. Provo ciò primieramente di quella, ch'è fornita dal segno +. Poichè $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}$, si troverà alzando al quadrato $x^2 = \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} + \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} + 2\sqrt[4]{a^4}$: ma $\sqrt[4]{a^4} = \pm a$; dunque $x^2 \mp 2a = \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} + \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}$, e di nuovo elevando al quadrato $x^4 \mp 4ax^2 + 4a^2 = b + 2a^2$, e finalmente $x^4 \mp 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$.

Collo stesso metodo proverò dipendere la formola fornita dal segno − da entrambe le equazioni $x^4 \mp 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$.

Nell'ipotesi di $\frac{b^2}{4} > a^4$ la formola col segno + si deve intendere derivata da $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, e la formola col segno − ha da supporsi procedere da $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$.

La formola $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}}{2}$ si paragoni colla espressione $Ch.\frac{\varphi}{4} = \frac{\sqrt[4]{Ch.\varphi + Sh.\varphi} + \sqrt[4]{Ch.\varphi - Sh.\varphi}}{2 \cdot r^{-\frac{3}{4}}}$, e si troverà $\frac{1}{2}x = Ch.\frac{\varphi}{4}$, $\frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi}{r^{-3}}$; $\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4} = \frac{Sh.\varphi}{r^{-3}}$, e giacchè $Ch.\varphi^2 - Sh.\varphi^2 = r^2$, sostituiti in cambio di $Ch.\varphi$, $Sh.\varphi$ i loro valori

valori, scopriremo $\frac{a^4}{r^6} = r^2$, e quindi $\sqrt{a} = r$.

Si confronti la formola $\frac{x}{2} = \sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}$

colla seguente $Sh.\frac{\varphi}{4} = \frac{\sqrt[4]{Ch.\varphi+Sh.\varphi} - \sqrt[4]{Ch.\varphi-Sh.\varphi}}{2.r^{-\frac{3}{4}}}$,

e ne proverrà $\frac{x}{2} = Sh.\frac{\varphi}{4}$, $\frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi}{r^{-3}}$, $\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4} = \frac{Sh.\varphi}{r^{-3}}$,

$\sqrt{a} = r$.

La medesima costruzione serve per ambedue le equazioni

$x^4-4ax^2+2a^2-b=0$, $x^4+4ax+2a^2-b=0$, essendo

riguardo alla prima $\frac{x}{2} = Ch.\frac{\varphi}{4}$, ed in riguardo alla

seconda $\frac{1}{2}x = Sh.\frac{\varphi}{4}$.

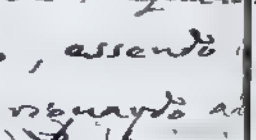


Fig. 1

Col seno tutto, o semiasse $CA = \sqrt{a}$ (fig. 1) si

descriva l'iperbola equilatera AQN,

e fatta la riflessione essere $\frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi}{r^{-3}}$, e perciò

$\frac{b}{2.r^3} = Ch.\varphi$, e sostituito in cambio di r

il suo valore $\sqrt{a}$, $\frac{b}{2.a^{\frac{3}{2}}} = Ch.\varphi$, si tagli

il coseno $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{3}{2}}}$, e si conduca il seno MN, che

per la natura dell'iperbola si eguaglierà a $\sqrt{CM^2 - CA^2}$

$=\sqrt{\frac{b^2}{4a^3}-a} = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}{\sqrt{a^3}}$. Continuata MN sino all'assintoto

CQ, ed essendo $MQ = CM$, resta determinata NQ

$MQ - MN = \frac{\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}{\sqrt{a^3}}$, e condotta NP normale all'

assintoto, ne risulta $PQ = \frac{\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}{\sqrt{2a^3}}$. Poichè

avremo $CQ = CM.\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2a^3}}$, e $CP = CQ - PQ = \frac{\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}}{\sqrt{2a^3}}$

Ill.mo Sig.r Sig.r Padrone Col.mo

Sia ora = CG la prima delle tre medie proporzionali fra CK, e CP, la quale si determina facilmente prendendo fra CK e CP una media proporzionale $CH = \sqrt{CK \cdot CP} = \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}{\sqrt{2a^3}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}}{\sqrt{2a}}$, ed indi fra CK e CH una media $CG = \sqrt{CK \cdot CH} = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}}{\sqrt{2}}$. Descritta GQ normale all'assintoto CQ, pel punto Q si meni βQI normale all'asse CM. Per la proprietà dell'iperbola riferita all'assintoto abbiamo $QG = \frac{\overline{CK}^2}{CG} = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}}$: ma GI = QG; dunque $CI = CG + GI = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}}$ e quindi $CA = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}}{2} + \frac{a}{2\sqrt[4]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}} = \frac{\sqrt{2a + \sqrt{b + 2a^2}}}{2}$, come non difficilmente si deduce dal computo. Poichè $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{BQ}^2$, troveremo $BQ = \sqrt{\frac{2a + \sqrt{b + 2a^2}}{4} - a} = \frac{\sqrt{-2a + \sqrt{b + 2a^2}}}{2}$. Ora sappiamo essere le radici dell'equazione $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$ $x = \pm\sqrt{2a \pm \sqrt{b + 2a^2}}$, fra le quali sono reali soltanto le due $\pm\sqrt{2a + \sqrt{b + 2a^2}}$ nella ipotesi di $\frac{b^2}{4} > a^4$, e conseguentemente di $\sqrt{b + 2a^2} > 2a$. Avremo dunque $\frac{x}{2} = \pm\frac{\sqrt{2a + \sqrt{b + 2a^2}}}{2}$; e quindi $CB = \frac{\sqrt{2a + \sqrt{b + 2a^2}}}{2}$ uguale alla metà della radice positiva

dalla

della equazione $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, e $Cb = \ldots$ è
$-\sqrt{2a + \sqrt{b + 2a^2}}$ uguale alla semiradice negativa
che ci somministrano dal ramo della descritta
iperbola. Alla equazione $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$
competono le radici $\pm\sqrt{-2a \pm \sqrt{b + 2a^2}}$, due reali
$\pm\sqrt{-2a + \sqrt{b + 2a^2}}$, ed altrettante immaginarie
$\pm\sqrt{-2a - \sqrt{b + 2a^2}}$, ritenuta sempre la supposizione
di $\sqrt{b + 2a^2} > 2a$. La costruzione pertanto ci dà

$$\frac{1}{2}x = \begin{cases} BC = +\dfrac{\sqrt{-2a + \sqrt{b + 2a^2}}}{2} \\ bc = -\dfrac{\sqrt{-2a + \sqrt{b + 2a^2}}}{2} \end{cases}$$ seni iperbolici uguali

alla metà delle due radici reali della sovrascritta
equazione. Per la qual cosa la nostra costruzione
determina tutte e quattro le semiradici reali
della equazione $x^4 \mp 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$ nella
ipotesi di $\frac{b^2}{4} > a^4$, o sia di $\sqrt{b + 2a^2} > 2a$; e ci
mostra l'esattezza del metodo di mio fratello.

Facciamo transito alla supposizione di $a^4 > \frac{b^2}{4}$. La
formola $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}}$, o sia l'equi-
valente $x = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$, che deve
considerarsi dipendere dalla equazione
$x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, si divida per 2, e si metta
al paragone colla espressione

$$Cc.\frac{\varphi}{4} = \frac{\sqrt[4]{Cc.\varphi + \sqrt{-1}\cdot Sc.\varphi} + \sqrt[4]{Cc.\varphi - \sqrt{-1}\cdot Sc.\varphi}}{2r^{-\frac{3}{4}}}$$, e si

scoprirà $\frac{1}{2}x = Cc.\frac{\varphi}{4}$, $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\varphi}{r^{-3}}$, $\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}} = \frac{Sc.\varphi}{r^{-3}}$

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

e poichè $\overline{Cc.\varphi}^2 + \overline{Sc.\varphi}^2 = r^2$, sostituiti in vece di $Cc.\varphi$, $Sc.\varphi$ i loro valori, ci accorgeremo essere $r = \sqrt{a}$.
Nella mia lettera dei 12 8bre ho provato dipendere la formola $x\sqrt{-1} = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}}}$ dalla equazione $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$. La predetta formola divisa per 2, si confronti colla espressione

$$Sc.\frac{\varphi}{4}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt[4]{Cc.\varphi + \sqrt{-1}\,Sc.\varphi} - \sqrt[4]{Cc.\varphi - \sqrt{-1}\,Sc.\varphi}}{2.r^{\frac{3}{4}}}$$, e si

troverà $\frac{1}{2}x = Sc.\frac{\varphi}{4}$; $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\varphi}{r^{-3}}$; $\sqrt{a^4 - \frac{b^2}{4}} = \frac{Sc.\varphi}{r^{-3}}$, $r = \sqrt{a}$.
Col raggio $CA = \sqrt{a}$ (fig. 2.) descritto il circolo $ANaA$ si prenda il cosseno $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{3}{2}}}$, e si conduca il seno MN, che determinerà l'arco $AN = \varphi$. Si divida questo in quattro parti eguali, e fra esse la prima sia Ae, il cui seno Be, ed il coseno CB, e si eguaglieranno essi alle due semiradici positive dell'equazione $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$. Tirato poscia il diametro eCe, e abbassato il seno eb; saranno be, Cb le due semiradici negative dell'equazione medesima;

Fig. 2

dimodochè la descritta costruzione somministrerà tutte le quattro radici reali; onde resta fornita l'equazione $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$ nell'ipotesi di $a^4 > \frac{b^2}{4}$.
Cerchiamo presentemente i valori della semiradice

Be

Ae, CB: Sia (fig. 3.) l'arco $AHN = \varphi$, $CA = \sqrt{a}$ il suo raggio, $CM = \frac{b}{2a^{\frac{3}{2}}}$ il suo coseno, $MN = \sqrt{\overline{CN}^2 - \overline{CM}^2} = \sqrt{a - \frac{b^2}{4a^3}} = \sqrt{\frac{a^4 - \frac{1}{4}b^2}{a^3}}$ il suo seno, $MA = CA - CM = a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2a^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a^2 - b}{2a^{\frac{3}{2}}}$ il suo seno verso, il tutto come nella fig. 2.

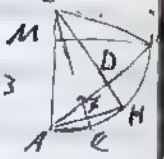


Fig. 3

Si tiri la corda $AN = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{MN}^2} = \sqrt{\frac{4a^4 - 4a^2b + b^2}{4a^3} + \frac{a^4 - \frac{1}{4}b^2}{a^3}} = \sqrt{\frac{2a^2 - b}{a}}$, e divisala per metà nel punto D, onde $AD = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^2-b}{a}} = \sqrt{\frac{2a^2-b}{4a}}$, pel detto punto si meni il raggio CDH, che taglierà l'arco $AeH = \frac{1}{2}\varphi$. Avremo il valore di $CD = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{a - \frac{2a^2+b}{4a}} = \sqrt{\frac{2a^2+b}{4a}}$, e conseguentemente quello di $DH = CH - CD = \sqrt{a} - \sqrt{\frac{2a^2+b}{4a}}$. Descritta la corda $AH = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{\frac{2a^2-b}{4a} + a - \sqrt{2a^2+b} + \frac{2a^2+b}{4a}} = \sqrt{2a - \sqrt{2a^2+b}}$ si partisca per metà nel punto F, dimodochè sia $AF = \frac{\sqrt{2a - \sqrt{2a^2+b}}}{2}$, e per esso punto si conduca il raggio CFe, che determinerà l'arco $Ae = \frac{1}{4}\varphi$ uguale all'arco Ae della fig. 2.; e quindi essendo $AF = \frac{\sqrt{2a - \sqrt{2a^2+b}}}{2}$ (fig. 3.) il seno dell'arco Ae, lo stesso valore avrà parimente il seno Be (fig. 2.) dell'arco eguale $Ae = \frac{1}{4}\varphi$. Resta che si trovi il valore del coseno (fig. 2.) $CB = \sqrt{\overline{Ce}^2 - \overline{Be}^2} = \sqrt{a - \frac{2a - \sqrt{2a^2+b}}{4}} =$ $\sqrt{2a + \sqrt{2a^2+b}}$.

Sciogliendo l'equazione $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, con altro metodo

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Colmo

365

363

metodo, si determina $x = \pm\sqrt{2a \pm \sqrt{2a^2+b}}$, e per conseguenza $\frac{1}{2}x = \pm\frac{\sqrt{2a \pm \sqrt{2a^2+b}}}{2}$: ma questi stessi valori ci somministra il metodo dell'Ab. Vincenzo; dunque un tal metodo è irreprensibile.

termina mio fratello tutte le quattro semi radici o per coseni, o per seni, aggiungendo all'arco φ una, due, tre circonferenze. Io ne ottengo la determinazione con una costruzione semplicissima, che esprime due semi-radici per coseni, ed altrettante per seni, la quale è analoga a quella della Fig. 1.

Nell'ipotesi di $\frac{b^2}{4} > a^4$ la costruzione della Fig. 1. ci dà tutte quattro le semiradici reali dell'equazione $x^4 \mp 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, due delle quali appartengono alla formola $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, e le altre due alla formola $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$. Anche nella supposizione di $a^4 > \frac{b^2}{4}$ la costruzione della Fig. 2. somministra tutte quattro le semiradici reali dell'equazione $x^4 \mp 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, le quali per altro spettano alla formola $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, essendo immaginarie quelle della formola $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$.

Confido, che colle esposte riflessioni rimarranno sciolti tutti i suoi dubbj, e che resterà pienamente confermata l'esattezza del metodo di mio fratello.

L'Opera dei Principj, e dei Metodi della Meccanica, di cui egli avea lasciati 20. Capitoli, l'ho terminata io valendomi delle Lettere dirette al P. Carina, e

altri

altri manoscritti sullo stesso argomento; e di alcune Dissertazioni edite, e inedite. L'Ab. Vanautgarden mi hà fatto il favore di tradurla in latino, dimodochè presentemente è interamente preparata per l'edizione. Di ciò ne ho reso consapevole il Sig. Ab. To[aldo] onde si possa aggiunger anche quest'Opera, se mai costì si risolvesse di stampare tutte l'Opere dell' Ab. Vincenzo. Termino questa lunga lettera protestandomi con pienissima stima

Di V.S. Ill.ma

Treviso 24. Xbre 1779.

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Covarelli. Modena.

Umil.mo Divot.mo Servitore
Giordano Riccati

Illmo Sig. Sig. Pron Colmo

occasione opportuna, quale mi ha sommini=
strato un Ufficiale di partenza da Roma
per Venezia ho indirizzato a V.S. dodici
copie della mia Lettera. Il Sig. Dottor Anto
nio Meloni quale è alla testa degli opuscoli
quali si pubblicano da Ferrara, mi ha si
gnificato, che nel terzo, o quarto tomo di
questi opuscoli ristamperà la mia Lettera
tradotta: in questa occasione adunque penso
indirizzare al Sig. Meloni la Lettera pre-
gievolissima, acciò possa farne uso delle
sode riflessioni, quali V.S. si è degnata
indirizzarmi. Si assicuri fra tanto il Sig. Conte
che vivo anzioso de' suoi commandi, quali
augurandomi, mi segno.

Di V.S. Illma Roma 26 Dicembre 1777

Umilmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli

... ... vedere tutte le poesie che egli ha stam
pato. Io darò un Indice delle cose che desidero ad un Nostro

346

Cavalli. Modena.   Giordano Riccati

[illegible] vedere tutte le poesie che egli ha stam-
pato. Io darò un Indice delle cose che desidero ad un Nostro

All'Ill.mo Sig.r Sig.r e Pron Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso.

Cavalli. Modena.

Giordano Riccati

Illmo Sigre Sigre Prone Colmo 349

i scrive il Sig Gianfrancesco de' Malfatti, che V. S. Illma

Illmo Sigr Sigr Pron Colmo 347

Il nuovo anno mi dà occasione di ricordare a V. S. Illma la mia umile servitù, siccome fo, desiderandole ben di cuore tutte le benedizioni del Cielo. Ho udito, se mal non mi ricordo, dal chiarissimo Signor Tealdo Profes. di Padova che la Sua grande Opera sopra la Musica si stampa. Io sono avidissimo di vederla, onde bramo da V. S. Illma nuove più distinte. Così desidero ancora intendere se Ella abbia stesa la Vita di Monsignore Steffani, o fatto in questo tempo altro lavoro. Tutte le sue produzioni fanno grande onore all'Italia, e le sue Opere Musicali saranno un giorno la guida dei saggi Compositori; dico un giorno, cioè quando i Professori si dimenticano del sonno in cui sono al presente, e gli uomini alla fine si accorgano, che mai non sa Musica chi altro non sa che Musica.

Io ho abbozzato la vita di Benedetto Marcello sulle memorie che mi sono state trasmesse dal N. H. Lorenzo Marcello che finì di vivere l'anno scorso, e alquante altre, che aveva presso di me. Ma in tutto sono scarse, e singolarmente vorrei un Indice più esato delle sue Musiche Inedite, e vorrei anche vedere tutte le poesie, che egli ha stampato. Io darò un Indice delle cose che desidero ad un Nostro

366

Religioso Predicatore, che nella Prossima Quaresi
passerà per Venezia. Ma in questo minuzie è diffi
trovare, chi voglia, possa, e sappia fare il raccoglit
Con grandissima fatica mi trovo finalmente in mano que
mi per la continuazione da me disegnata dell' Opera
tellliana, e spero in non molto tempo averne due altri
allora mi volgerò tutto a pensare alla stampa; intorno all
le io non ho ancora deliberato se sia meglio valersi delle ra
incise con aqua forte, ovvero dei caratteri mobili, di cui fu
l'unico possessore il Sig.r Antonio da Castro in Venezia. Se
Ill.ma può darmi alcun lume, Le sarò infinitamente obblig
Mi conservi nella sua pregiatissima grazia, e mi comandi
a quello che sono, e sarò sempre
Di V. S. Ill.ma
Milano Coll.gio Imp.le 27 Decemb. 1779.

Umiliss.mo ed Obbligatiss.mo Servitor
Giovanni ...

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo

i scrive il Sig. Gianfrancesco de' Malfatti, che V.S. Ill.ma

10

All' Illmo Sig.r Sig.r Pron Colmo

Il Sig.r Co: Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Mi scrive il Sig. Gianfrancesco de' Malfatti, che V.S. Ill.ma desidera qualche mia produzione da inserire in cotesta Raccolta di Opuscoli, di cui Ella è il benemerito Editore. A titolo di obbedienza le spedisco dunque una Dissertazione, che tratta *Del moto di discesa, e di ascendimento dei corpi solidi immersi nei mezzi fluidi*, cui forse toccherà la sorte, che *minuit praesentia famam*. Posto che la stessa incontrasse il suo benigno compatimento, ne tengo in pronto un'altra d'argomento analogo *Dei due generi di resistenze, che nascono dalla inerzia della materia, e ritardano il moto dei corpi solidi dentro dei mezzi fluidi*, la quale potrà aver luogo in qualcuno dei susseguenti tomi. Intanto io accolgo questa felice occasione di dedicarle la mia servitù, e di protestarmi con rispettosa stima quale mi sottoscrivo, pregandola de' miei complimenti al degnissimo Sig. Malfatti, che fa molto onore a cotesta Università. Di V.S. Ill.ma

Treviso 31. Xbre 1779

Ill.mo Sig. Ab. Maloni.
Ferrara.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati